第13卷 第2期 郑州工学院学报 Vol.13 No.2
1992年 6 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Jun. 1992

广义分块对角矩阵的广义逆矩阵*

侯双根

(陕西工学院)

摘 要: 本文对广义分块对角矩阵的广义逆矩阵给出了一个运算规则，利用它可以简化求广义分块对角矩阵的广义逆矩阵.

关键词: 广义分块对角矩阵，广义逆矩阵

中国图书分类号: O151.21

1 两个定义及有关定理

定义 1 设 $A\in C^{m\times n}$，如果存在 $G\in C^{m\times n}$ 满足 Penrose—Moore 方程

(1) $AGA=A$ (2) $GAG=G$ (3) $(GA)^H=GA$ (4) $(AG)^H=AG$

的全部或一部分，称 G 为 A 的广义逆矩阵.

定理 对 $\forall A\in G^{m\times n}$，则满足 Penrose—Moore 方程(1)—(4)的 G 存在且唯一，这时记 $G=A^+$，且当 $A=(O)_{m\times n}$ 时，$A^+=(O)_{n\times m}$

定义 2 设矩阵 $A\in C^{m\times n}$，若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都是零矩阵，即

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

其中，$A_t\in C^{m_t\times n_t}$ $(t=1,\cdots,s)$，且 $\sum_{t=1}^{s}m_t=m,\sum_{t=1}^{s}n_t=n$，则称 A 为广义分块对角矩阵.

---

* 收稿日期：1991—08—22

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

记作 $A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_t,\cdots,A_s)$。

2 广义分块对角矩阵的广义:_矩阵

定理一　设　$A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_t,\cdots,A_s)$，且 G_t 为 A_t 的广义逆矩阵$(t=1,2,\cdots,s)$，则 $G=\mathrm{diag}(G_1,\cdots,G_t,\cdots,G_s)$为 A 的广义逆矩阵。

证明　因

$$AGA=\mathrm{diag}(A_1G_1A_1,\cdots,A_tG_tA_t,\cdots,A_sG_sA_s)=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_t,\cdots,A_s)=A$$

$$GAG=\mathrm{diag}(G_1A_1G_1,\cdots,G_tA_tG_t,\cdots,G_sA_sG_s)=\mathrm{diag}(G_1,\cdots,G_t,\cdots,G_s)=G$$

$$(GA)^H=(\mathrm{diag}(G_1A_1,\cdots,G_tA_t,\cdots,G_sA_s))^H$$
$$=\mathrm{diag}((G_1A_1)^H,\cdots,(G_tA_t)^H,\cdots,(G_sA_s)^H)=\mathrm{diag}(G_1A_1,\cdots,G_tA_t,\cdots,G_sA_s)=GA$$

$$(AG)^H=(\mathrm{diag}(A_1G_1,\cdots,A_tG_t,\cdots,A_sG_s))^H$$
$$=\mathrm{diag}((A_1G_1)^H,\cdots,(A_tG_t)^H,\cdots,(A_sG_s)^H)=\mathrm{diag}(A_1G_1,\cdots,A_tG_t,\cdots,A_sG_s)=AG$$

所以结论成立。

推论　设　$A=A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_t,\cdots,A_s),A_t(t=1,2,\cdots,s)$都是方阵，且 G_t 为 A_t 的广义逆矩阵$(t=1,2,\cdots,s)$，则　$G=\mathrm{diag}(G_1,\cdots,G_t,\cdots,G_s)$　为 A 的广义逆矩阵。

定理二　对 $VA=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_t,\cdots,A_s)$则 A^+存在、唯一，且

$$A^+=\mathrm{diag}(A_1^+,\cdots,A_t^+,\cdots,A_s^+)\qquad \text{其中 } A_t^+ \text{ 为 } A_t \text{ 的广义逆矩阵}$$

证明　由“一”中定理知 A^+、$A_t^+(t=1,2,\cdots,s)$都存在且唯一：

又由定理一知　$\mathrm{diag}(A_1^+,\cdots,A_2^+,\cdots,A_t^+)$满足 Penrose—Moore 四个方程。

所以　$A^+=\mathrm{diag}(A_1^+,\cdots,A_t^+,\cdots,A_s^+)$

推论 1　设　$A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_t,\cdots,A_s)$,且 A_t 都是方阵时，有

$$A^+=\mathrm{diag}(B_1,\cdots,B_t,\cdots,B_s)$$

其中：
$$B_t=\begin{cases}A_t^{-1} & \text{当}\quad \det(A_t)\neq 0\\ A_t^+ & \text{当}\quad \det(A_t)=0\end{cases}$$

推论 2 设 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_k,\cdots,\lambda_n),\lambda_k\in C(k=1,\cdots,n)$,则　$A^+=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_k,\cdots,\mu_n)$

其中
$$\mu_k=\begin{cases}0 & \text{当}\lambda_k=0\\ \dfrac{1}{\lambda_k} & \text{当}\lambda_k\neq 0\end{cases}\qquad (k=1,\cdots,n)$$

3 举　例

例 1　设　$A=\mathrm{diag}(2,0,i,1+i)$，则

$$A^+=\mathrm{daig}(\frac{1}{2},\ 0,\ -i,\ \frac{1-i}{2})$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

例2 设$A=\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix},\ 0,\ \begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ i\right)$ 求A^+

解 因 $\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ $(0)^+_{1\times1}=(0)$

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}^+=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\quad (0)^+_{3\times3}=(0)_{3\times3}\quad (i)^+_{1\times1}=(-i)_{1\times1}$$

所以 $A^+=\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix},0,\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},-i\right)$

例3 设 $A=\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}-1&0&1\\2&0&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix},0,\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},i\right)$ 求A^+

解 由 $\begin{bmatrix}-1&0&1\\2&0&-2\end{bmatrix}^+=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1&2\\0&0\\1&-2\end{bmatrix}$ $(0)^+_{3\times2}=(0)_{2\times3}$

及例2知: $A^+=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1&2\\0&0\\1&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix},0,\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},-i\right)$

参 考 文 献

〔1〕 丁学仁，蔡高厅编．工程中的矩阵理论．天津大学出版社，(1985年9月第一版)

〔2〕 侯双印．关于A⁺的两个性质的简明证法及其定理．郑州工学院学报，第12卷第4期

Generalized Inverse Matrix of Generalized Block Diagonal Matrix

Hou Shuangken

(Shanxi Institute of Technology)

Abstract: In this paper an operational rale is given to the generalized inverse matrix of generalized block diagonal matrix. It can be used to simplify the process of finding the generalized inverse matrix of a generalized block diogonal matrix

Keywords: generalized block diagonal matrix, generalized inverse matrix

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net