第13卷 第2期 郑州工学院学报 Vol.13 No.2
1992年 6 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Jun. 1992

共形平坦 Sasaki 流形*

刘连珠 陈永华

(昆山市工商局) (数力系)

摘 要： 在本文中，我们讨论了共形平坦 Sasaki 流形的一些性质．证明了不存在具有零切触 Bochner 曲率的共形平坦 Sasaki 流形，并得到了共形平坦 Sasaki 流形的一些其它性质．指出〔5〕中定理 2 是错误的．

关键词： Sasaki 流形，共形平坦，Bochner 曲率

中国图书分类号： O19

1 预备知识

我们定义 m 维 Riemann 流形 M 的 Wely 共形曲率张量为〔2〕

$$C(X,Y)Z=R(X,Y)Z-\frac{1}{m-2}S(Y,Z)X-S(X,Z)Y$$

$$+g(Y,Z)QX-g(X,Z)QY)+\frac{r}{(m-1)(m-2)}(g(Y,Z)X-g(X,Z)Y)\quad(1)$$

其中 R,S,Q,g 和 r 分别是 M 上的 $Riemann$ 曲率张量，$Ricci$ 张量，$Ricci$ 算子，$Riemann$ 度量和数量曲率，X，Y，Z 是 M 上的任意切向量场。

设M是 $(2n+1)$ 维$Sasaki$流形，$Sasaki$结构张量是 (ϕ,ξ,η,g) 则〔1〕

$$\begin{cases}\phi^2X=-X+\eta(x)\xi \qquad g(\phi X,Y)+g(X,\phi Y)=0\\ g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)\end{cases}\quad(2)$$

$$\eta(X)=g(X,\xi)\qquad \eta(\phi X)=0\quad(3)$$

$$S(X,\xi)=2n\eta(X)\qquad S(\xi,\xi)=2n\quad(4)$$

$K-$切触流形M称为$\eta-Einstein$流形，如果M的$Ricci$曲率满足：

$$S(X,Y)=ag(X,Y)+b\eta(X)\eta(Y)\quad \text{其中}a,\ b\text{是常数。}\quad(5)$$

由 (2) 式， (4) 式和 (5) 式，我们有：$a+b=2n$ $\qquad r=(2n+1)a+b$

设M是常$\phi-$截曲率为C的 $(2n+1)$ 维$Sasaki$流形，则由〔1〕：

$$R(X,Y)Z=\frac{c+3}{4}(g(Y,Z)X-g(X,Z)Y)+\frac{c-1}{4}(\eta(X)\eta(Z)Y$$

$$-\eta(Y)\eta(Z)X+g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi+g(\phi Y,Z)\phi X$$

$$-g(\phi X,Z)\phi Y+2g(X,\phi Y)\phi Z)\quad \text{由此得:}\quad(6)$$

*收稿日期:1990-07-09

由此得: $S(X, Y) = \frac{(n+1)c+3n-1}{2} g(X, Y) - \frac{(n+1)(c-1)}{2} \eta(X)\eta(Y)$ (7)

故 $r = n((n+1)c+3n+1)$ (8)

*Sasaki*流形*M*的切触*Bochner*曲率张量定义为〔3〕:

$$B(X, Y) = R(X, Y) + \frac{1}{2n+4}(QY\wedge X - QX\wedge Y + Q\phi Y\wedge\phi X - Q\phi X\wedge\phi Y$$
$$+ 2g(Q\phi X, Y)\phi + 2g(\phi X, Y)Q\phi + \eta(Y)\phi X\wedge\xi + \eta(X)\xi\wedge\phi Y)$$
$$- \frac{2n+k}{2n+4}(\phi Y\wedge\phi X - 2g(\phi x, y)\phi) - \frac{k-4}{2n+4} Y\wedge X + \frac{k}{2n+4}(\eta(Y)\xi\wedge X$$
$$+ \eta(X) Y\wedge\xi) \quad 其中, k = \frac{2n+r}{2n+2}, \tag{9}$$

$(X\wedge Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y.$

2　定理及其证明

定理 1　共形平坦 Sasaki 流形一定是常 ϕ−截曲率为 1 的 Sasaki 流形。

命题 1　共形平坦 Sasaki 流形 M 不可能是平坦的。

命题 2　共形平坦 Sasaki 流形是 η−Einstein 流形。

定理 2　不存在维数大于 2 的具有零切触 Bochner 曲率的共形平坦 Sasaki 流形。

定理 3　如果 M 是 (2n+1) 维完备单连通共形平坦 Sasaki 流形，则 M 和 (2n+1) 维单位球面 S * T2n+1　(1) 等距

定理 1 的证明: 引理 1([4])共形平坦 K 一切触流形M^{2n+1}是一个空间形式。引理 2 ([5]定理 3) 常截曲率的共形 K−切触 Riemann 流形必然是 Sasaki 流形，而且截曲率是 1。

由引理 1 和引理 2，立即可得定理 1.　Q.E.D.

命题 1 的证明: 由定理 1 及 (2, 8) 式，我们可得 M 的数量曲率为:
$r = n^2 + n + 3n^2 + n = 2n(2n+1) \neq 0$，　故*M*不是平坦的　*Q.E.D.*

命题 2 的证明:　引理 3　([1]　P285　命题 5.3) 如果 Sasaki 流形 M 是常 ϕ−截曲率的，则 M 必是 η−Einstein 流形。

由定理 1 和引理 3，我们可以得到命题 2　Q.E.D.

定理 2 的证明:
引理 4　设 *M* 是具有零切触 *Bochner* 曲率的 $(2n+1)$ 维 *Sasaki* 流形，则在 *M* 上任意点 *P* 处 *n* 个相互正交的 ϕ− 截面的 ϕ− 截曲率的和是$\frac{n^2-2n+2r}{n+2}$.

证明: 设*E*是*M*上任意一点*P*处的任意一个由相互正交的单位向量*X*和*Y*张成的平截面。由 (9) 式，我们有:

$$R(X, Y, X, Y) = g(R(X, Y)Y, X) = -g(R(X, Y)X, Y)$$
$$= g(\frac{1}{2n+4}(g(X, X)QY - g(X, QY)X - g(Y, X)QX + g(QX, X)Y$$
$$- g(Q\phi Y, X)\phi X - g(\phi Y, X)Q\phi X + g(Q\phi X, X)\phi Y + 2g(Q\phi X, Y)\phi X$$

$$+2g(\phi X,Y)Q\phi X+\eta(Y)\eta(X)\phi X+\eta(X)g(\phi Y,X)\xi$$

$$-\eta(X)\eta(X)\phi Y)-\frac{2n+K}{2n+4}(g(\phi X,X)\phi Y-g(\phi Y,X)\phi X$$

$$-2g(\phi X,Y)\phi X)-\frac{K-4}{2n+4}(g(X,X)Y-g(Y,X)X)+\frac{K}{2n+4}(\eta(Y)\xi$$

$$-\eta(Y)\eta(X)X+\eta(X)\eta(X)Y-\eta(X)g(X,Y)\xi),Y)$$

由此及(2)式，(3)式和(4)式，经计算可得平截面E的截曲率$K(E)$：

$$K(E)=R(X,Y,X,Y)=\frac{1}{2n+4}(S(X,X)+$$

$$+S(Y,Y)-6S(\phi X,Y)g(X,\phi Y))+\frac{2n+k}{2n+4}(g(\phi X,Y))^2-$$

$$-\frac{k-4}{2n+4}+\frac{k}{2n+4}(\eta(X)\eta(X)+\eta(Y)\eta(Y)) \tag{10}$$

设E是$\phi-$截面，在(10)式中取$Y=\phi X$，我们可得：

$$K(E)=\frac{4}{n+2}S(X,X)+1 \tag{11}$$

在M上任一点P处，我们取$\phi-$基$\{e_1,\cdots,e_n,\phi e_1,\cdots,\phi e_n,\xi\}$其中由$e_i$和$\phi e_i$张成的平截面($\phi-$截面)记为$Ei$，据(11)式，可得：

$$\sum_{i=0}^{n}K(E_i)=\frac{n^2-2n+2r}{n+2}\qquad Q.E.D \tag{12}$$

根据定理1，(12)式和(8)式，我们有：$\sum\limits_{i=1}^{n}K(E_i)=n$ $\qquad(13)$

$$\sum_{i=1}^{n}K(E_i)=\frac{n^2-2n+4n(2n+1)}{n+2} \tag{14}$$

如果M是具有零切触Bochner曲率的共形平坦的Sasaki流形，则由(13)式和(14)式，我们可以得到，n=0,因为dimM>2，所以这是不可能的。

Q.E.D.

引理5 ([1] P_{282} 定理5.5) 设M是(2n+1)维常ϕ-截曲率为C的完备单连通Sasaki流形，

①如果$C>-3$，则M与$S^{2n+1}(c)$等距或者M与球面S^{2n+1} D—位似；

②如果$c=-3$，则M与$R^{2n+1}(-3)$等距；

③如果$c<-3$，则M与$(R,CD^n)(c)$等距。

定理3的证明：

由定理1和引理5，我们立即可以得到定理3。

Q.E.D.

3 文〔5〕中定理2的错误

在文〔5〕中作者证明了(〔5〕定理2)：

共形 K 一切触 Ricmanni 流形不是 η-Einstein 流形。

由〔5〕，我们知道，Sasaki 流形是一种特殊的共形 K 一切触 Riemann 流形。

根据定理1和命题2，我们知道常截曲率 Sasaki 流形一定是 η-Einstein 流形，这与〔5〕中定理2矛盾。

事实上，〔5〕中定理2的证明过程中最后一部分是错误的，即由该文中（4.12）式推导不出公式:

$$g(\phi X, \phi Z) = g(X, Z)$$

正确的过程和结果是:

在文〔5〕的（4.12）式中，用 ϕX 和 ϕZ 分别代替 X 和 Z，我们有:

$$R(\phi X, \xi, \phi Z, \xi) = -g(\phi X, \phi Z) - pF(\phi X, \phi Z)$$

$$= -g(\phi X, \phi z) - pg(\phi^2 X, \phi Z)$$

$$-g(\phi X, \phi Z) \quad pg(\phi X, Z) = -g(\phi X, \phi Z) - pF(X, Z)$$

而由文〔5〕中的（4.8）式，有:

$$R(\phi X, \xi, \phi Z, \xi) = R(X, \xi, Z, \xi) = -g(X, Z) + \eta(Z)\eta(X) - pF(X, Z)$$

比较以上二式，我们得到:

$$g(\phi X, \phi Z) = g(X, Z) - \eta(X)\eta(Z)$$

致谢：孙振祖教授仔细审阅了本文并给以指导，作者在此表示诚挚的谢意。

参 考 文 献

〔1〕 Yano.K.& Kon.M.,Structures on Manifolds,World Scientific,Singapore.1984

〔2〕 欧阳崇珍.关于 Bochner-Kaehler 流形的注记.江西大学学报,13(1989)1,4——6

〔3〕 Matsumoto.m.& Chuman.G.ON the Bochner curvature tensor,TRU.Math,5(1969),21——30

〔4〕 Tanno.s. Locally symmetric K-contact Riemann manifolds,Proc.Japan Acad., 43(1967), 581——583

〔5〕 Sharma.K. On conformal K-contact Riemann manifold,Tensor.N.S., 36(1982), 29——32

Conformal flat Sasakian manifolds

Liu LianZhu　　Chen Yonghua

(Dept of Industry and Business of Kunshan)(Dept.of Math.& Mech.)

Abstract: In this paper,we discuss some properties on conformsl flat Sasakian manifolds.

Keywords: Sasakian manifold, conformal flat,Bochner curvature