对混凝土双向应力状态下本构关系的分析*

张雷顺

(郑州工学院 水环系)

摘要: 本文引入等效切线模量，给出了泊松比影响因子，建立了在有限元分析中使用方便的本构关系.

关键词: 混凝土，等效模量，泊松比影响因子.

中国图书分类号: TU313

1 等效单向应变模型

处于双向应力状态下的混凝土，由于微裂缝的存在，任一方向的应力将不仅通过泊松比对另一方向的刚度施加影响；而且也会通过对微裂缝的约束对另一方向的刚度施加影响．不考虑微裂缝时，材料为各向同性体．考虑微裂缝时，由于两个方向应力的差异，将通过微裂缝在两向产生不同刚度影响，从而使混凝土成为动正交异性体．

将混凝土视为动正交异性体时，非线性过程中的任一微小过程，都可近似为线性过程，于是有应力应变增量关系

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\mu_1\mu_2} = \begin{bmatrix} E_1 & \mu_2 E_1 & 0 \\ \mu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu_1\mu_2 G) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

其中 E_1、E_2 为施加上级载荷增量后，在主应力 1、2 向的切线模量.

μ_1、μ_2 为 1、2 向受力对 2、1 向产生的影响系数.

$d\sigma_1$、$d\sigma_2$、$d\tau_{12}$ 和 $d\varepsilon_1$、$d\varepsilon_2$、$d\gamma_{12}$ 为本级载荷在上级载荷作用下的主方向上产生的应力增量、应变增量.

根据正交异性理论 $E_1\mu_2 = E_2\mu_1$

近似取 $\mu = \sqrt{\mu_1\mu_2}$

$$(1-\mu^2)G = \frac{1}{4}(E_1 + E_2 - 2\mu\sqrt{E_1E_2})$$

则 (1) 式可改写为

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \mu\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \mu\sqrt{E_1E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(E_1+E_2-2\mu\sqrt{E_1E_2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

* 收稿日期:1992-01-14

E_1、E_2 的值必须采用双向加载方式确定. 但直接通过双向加载得到的模量，将不仅包含了微裂缝的影响，也包含了泊松比的影响. 若将其直接代入 (2)，就会两次考虑泊松比影响. 因此必须首先对其消除泊松比影响，然后再代入 (2).

我们知道，在每级载荷增量内，应力应变增量近似为线性关系

$$\begin{cases} d\varepsilon_1 = \dfrac{1}{E_1} d\sigma_1 - \dfrac{\mu_1}{E_2} d\sigma_2 \\ d\varepsilon_2 = \dfrac{1}{E_2} d\sigma_2 - \dfrac{\mu_2}{E_1} d\sigma_1 \end{cases} \tag{3}$$

从(3)可得

$$\begin{cases} d\sigma_1 = \dfrac{E_1}{1 - \mu_1 \dfrac{E_1}{E_2} \dfrac{d\sigma_2}{d\sigma_1}} d\varepsilon_1 \\ d\sigma_2 = \dfrac{E_2}{1 - \mu_2 \dfrac{E_2}{E_1} \dfrac{d\sigma_1}{d\sigma_2}} d\varepsilon_2 \end{cases} \tag{4}$$

记　$\alpha_1 = \dfrac{d\sigma_2}{d\sigma_1}, \alpha_2 = \dfrac{d\sigma_1}{d\sigma_2}, \eta_1 = \dfrac{E_1}{E_2}, \eta_2 = \dfrac{E_2}{E_1}$　　$\mu_1 = \mu_2 = \mu$

则

$$d\sigma_i = \frac{E_i}{1 - \mu n_i \alpha_i} d\varepsilon_i \qquad (i = 1,2) \tag{5}$$

1977年 Darwin 和 Pecknold 认为，若记

$$d\varepsilon_{iu} = \frac{1}{1 - \mu n_i \alpha_i} d\varepsilon_i \qquad (i = 1,2) \tag{6}$$

则

$$d\sigma_i = E_i d\varepsilon_{iu} \qquad (i = 1,2) \tag{7}$$

其中 $d\varepsilon_{iu}$ 称为等效单向受力应变. 则 (7) 中 E_i 由于等效单向受力应变的引入而消除了泊松比的影响. $\sigma_i = f(\varepsilon_{iu})$ 关系，他们认为可取为 *Saenz* 公式的形式

$$\sigma_i = \frac{E_0 \varepsilon_{iu}}{1 + (\dfrac{E_0}{E_{is}} - 2)\dfrac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + (\dfrac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}})^2} \qquad (i = 1,2) \tag{8}$$

(7)中的模量可由(8)得到

$$E_i = \frac{E_0[1 - (\dfrac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}})^2]}{[1 + (\dfrac{E_0}{E_{is}} - 2)\dfrac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + (\dfrac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}})^2]^2} \qquad (i = 1,2) \tag{9}$$

这就是所谓的 $D-P$ 模型.

2　等效单向模量模型

本人认为，$D-P$ 模型中关于 $\sigma_i = f(\varepsilon_{iu})$ 的分析不太明确，也没有给出泊松比的影响. 若采用本文提出的等效模量方法，则不但可以消除泊松比的影响，还可明确地分离出

泊松比影响因子．概念上更加清晰，应用于有限元分析也是方便的．

引入等效单向模量 $E_{iu}=\dfrac{E_i}{1-\mu n_i\alpha_i}\qquad (i=1,2)\qquad (10)$

则(5)式可写为 $d\sigma_i=E_{iu}d\varepsilon_i\qquad (i=1,2)\qquad (11)$

取定 α_i 进行双向应力实验，可直接得到 $\sigma_i=\varphi(\varepsilon_i)$ 关系曲线，由此可定出

$$E_{iu}=\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\qquad (i=1,2)\qquad (12)$$

该模量就是 (11) 中的模量．实验所得等效单向模量不仅含微裂缝影响，也含泊松比影响．(1) 式中 E_1、E_2 是仅含微裂缝影响的模量．它们满足 (10) 式．由 (10) 式得

$$\begin{cases}E_1=E_{1u}(1-\mu n_1\alpha_1)\\ E_2=E_{2u}(1-\mu n_2\alpha_2)\end{cases}\qquad (13)$$

从而有 $\dfrac{E_2}{E_1}=\dfrac{E_{2u}(1-\mu\alpha_2\dfrac{E_2}{E_1})}{E_{1u}(1-\mu\alpha_1\dfrac{E_1}{E_2})}$ 记 $\beta_1=\dfrac{E_{1u}}{E_{2u}}$，$\beta_2=\dfrac{E_{2u}}{E_{1u}}$

则 $n_2=\beta_2\dfrac{1-\mu\alpha_2n_2}{1-\mu\dfrac{1}{\alpha_2n_2}}$ 解之，得 $n_2=\dfrac{\beta_2+\dfrac{\mu}{\alpha_2}}{1+\mu\alpha_2\beta_2}$

注意到$n_1=\dfrac{1}{n_2}$，则$n_1=\dfrac{1+\mu\alpha_2\beta_2}{\beta_2+\dfrac{\mu}{\alpha_2}}$

将n_1，n_2代入(13)得 $E_i=\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu\alpha_i\beta_i}E_{iu}\qquad (i=1,2)\qquad (14)$

由于(14)式中E_i不含泊松比影响，E_{iu}含泊松比影响，故因子

$$\omega_i=\frac{1+\mu\alpha_i\beta_i}{1-\mu^2}\qquad (i=1,\ 2)\qquad (15)$$

为泊松比影响因子。

实验后的E_{iu}通过作用$\dfrac{1}{\omega_i}$就可把泊松比影响分离出来，只保留微裂缝的影响。

$\sigma_i=\varphi(\varepsilon_i)$曲线是通过实验得到的．对实验曲线若采用 $\sigma=\dfrac{E_0\varepsilon}{A+B\varepsilon+C\varepsilon^2}$

来拟合，则可得形式上与单向受压的$Saenz$公式相同的关系

$$\sigma_i=\frac{E_{0i}\varepsilon_i}{1+(\dfrac{E_{0i}}{E_{is}}-2)\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{ie}}+(\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{ie}})^2}\qquad (i=1,2)\qquad (16)$$

切线模量　$E_{iu}=\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}=\frac{E_{0i}[1-(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{ic}})^2]}{[1+(\frac{E_{0i}}{E_{is}}-2)\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{ic}}+(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{ic}})^2]^2}$　$(i=1,2)$　(17)

求得E_{iu}后，利用（14）式可得E_i，再将其代入(2)有

$$[D]_T=\frac{1}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}\lambda_1E_{1u} & \mu\lambda\sqrt{E_{1u}E_{2u}} & 0\\ \mu\lambda\sqrt{E_{1u}E_{2u}} & \lambda_2E_{2u} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(\lambda_1E_{1u}+\lambda_2E_{2u}-2\mu\lambda\sqrt{E_{1u}E_{2u}}\end{bmatrix} \tag{18}$$

其中　$\lambda_1=\frac{1}{\omega_1}$，$\lambda_2=\frac{1}{\omega_2}$，$\lambda=\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，$E_{0i}=\frac{E_0}{1-\mu\alpha_i}$，$E_0$为混凝土初始切线模量.

采用上述方法进行有限元分析是较方便的. 计算时，首先根据当前应力水平确定σ_{ic}、ε_{ic}及E_{is}，然后利用(17)式计算E_{iu}、λ_i、λ，由（18）得$[D]_T$，从而可确定出下级载荷的单刚和总刚.

3　两种模型之间的联系

运用上面的公式，可以导出D-P模型中等效单向应变的具体表达式. 将（14）代入(11)，得

$d\sigma_i=\omega_iE_id\varepsilon_i$　$(i=1,2)$　(19)

将其与(7)式比较有　$d\varepsilon_{iu}=\omega_id\varepsilon_i$　$(i=1,2)$　(20)

由于ω_i及$d\varepsilon_i$可通过实验确定，因而等效单向受力应变也可确定. 由（20）知，等效单向受力应变为双向应力状态下的单向应变作用泊松比因子后的应变.

本文取　$\alpha=\alpha_2=0.4$，0.6，0.8，1.0，$E_0=3\times10^6\mathrm{N/cm^2}$，$\varepsilon_p=-3.5\times10^{-3}$，$\sigma_c=-1500\mathrm{N/cm^2}$，并采用Kupfer和Gerstle提出的破坏准则

$$\begin{cases}\sigma_{2c}=\frac{1+3.65\alpha}{(1+\alpha)^2}\sigma_c\\ \sigma_{1c}=\alpha\sigma_{2c}\end{cases}$$

以及L_{iu}等人对ε_{ic}的建议

$\alpha_i\leqslant1$时：$\varepsilon_{ic}=-0.0025$；

$\alpha_i>1$时：$\varepsilon_{ic}=(-500+79.7\sigma_{ic})\times10^{-6}(N/mm^2)$

编制程序进行了分析计算.

图1给出了(16)式所示曲线$\sigma_i=\varphi(\varepsilon_i)$，它为双向应力下的拟合曲线，含泊松比及微裂缝影响. 图1中也给出了$\sigma_i=f(\varepsilon_{iu})$曲线，它不是直接根据（8）式确定的，而是通过（20）式，由ω_i、$d\varepsilon_i$确定$d\varepsilon_{iu}$，再累积得ε_{iu}，从而绘出的曲线. 它的切线模量消除了泊松比的影响，仅含微裂缝的影响. 从中可以看出

(1)在相同ε_i处，$\sigma_i=\varphi(\varepsilon_i)$的刚度比$\sigma_i=f(\varepsilon_{iu})$的刚度稍大，这正是泊松比的影响.

(2)由本文提供的方法所得到的$\sigma_i = f(\varepsilon_{iu})$曲线与$D-P$模型中所取的曲线是吻合的，都是单向受压的$Saenz$公式形式.

(3)计算表明，泊松比影响因子$\omega_i = g(\mu, \alpha_i, \beta_i)$对变量$\beta_i$是个弱函数. 它与非线性各向同性体的泊松比影响因子比较接近. 下面是计算所得几组数据. 在同一α_i下，ω_i是随载荷变化而变化的，但变化不大.

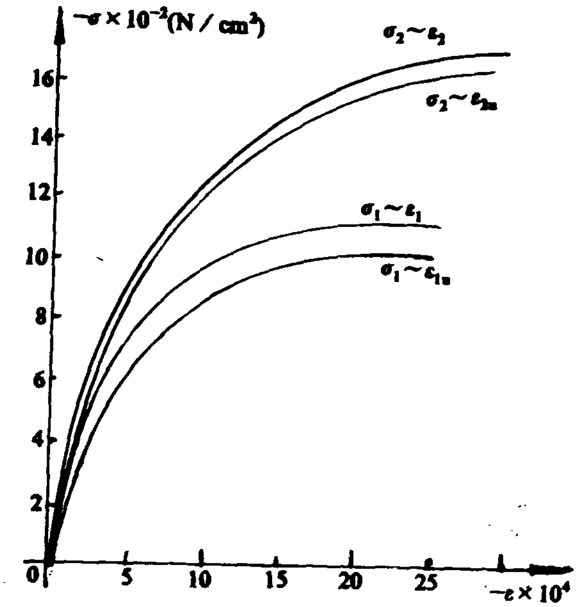

图 1

α	0.4	0.6	0.8	1.0
ω_1	1.75	1.43	1.37	1.25
ω_2	1.10	1.16	1.18	1.25

参　考　文　献

〔1〕 D.Darwin and D.Apecknold.Nonlinear Biaxial Stress Strain low for Concrete. 《proc.ASCE》, EM2, 1977-4.

〔2〕 朱伯龙，董振祥.钢筋混凝土非线性分析. 同济大学出版社，1985

Constitutive Relation Analysis of Concrete Under Biaxial Stresses

Zhang leishun

(Zhengzhou Inst. of Tech.)

Abstract: In this paper, equivalent tangent modulus is introduced, Poisson ratio effect factor is obtained, Constitutive relation to be easy use in finite element analysis is founded,

Keywords: Concrete, equivalent tangent, Poisson ratio effect factor.