第13卷 第1期　　郑州工学院学报　　Vol.13 No.1
1992年 3 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Mar. 1992

一类抛物-双曲型耦合方程组小初值问题的整体解*

蒋慧琴

(数理力学系)

摘 要：本文研究了非线性双曲，抛物耦合方程组的小初值问题的整体解的存在唯一性及 $t \to +\infty$ 时解的渐近性质.

关键词：耦合方程组，小初值问题，Banach 空间

中国图书分类号：O175

关于非线性双曲、抛物型方程组及其耦合方程组的各种定解问题，由于在物理、化学反应、生物和工程技术等学科的研究中常常出现，例如，著名的 Sine-Gordon 方程，研究交替作用的液压过程的 Zakharov 方程等等．故而引起人们的普遍重视．在[1-7]中就研究了非线性高阶双曲、拟双曲、抛物、拟抛物型方程组和耦合方程组的周期边值问题，初值问题和第一边界问题.

本文借助线性双曲和抛物型方程柯西问题解的存在唯一性、衰减估计和能量估计，用不动点方法证明了一类非线性抛物-双曲型耦合方程组小初值问题整体解的存在唯一性以及当 $t \to +\infty$ 时解的渐近性质.

本文考察以下非线性耦合方程组的小初值问题:

$$
(A)\begin{cases} u_t - \triangle u = F_1(U,\ DV,\ D_x u,\ D_x^2 u) \\ V_{tt} - \triangle V = F_2(u,\ DV,\ D_x u,\ D_x^2 u) \\ u(x,\ 0) = \varphi_0(x) \\ V(x,\ 0) = \varphi(x), \quad V_t(x,\ 0) = \psi(x) \end{cases}
$$

其中：$DV = (V_{x_i},\ \ i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$, $\quad D_x u = (u_{x_i},\ \ i = 1,\ \cdots,\ n)$

$$D_x^2 u = (u_{x_i x_j},\ \ i,\ j = 1,\ \cdots,\ n)$$

记 $\lambda = (u,\ DV,\ D_x u,\ D_x^2 u)$

$F_i(\lambda)$ $(i = 1,\ 2)$在 $\lambda = 0$ 附近足够光滑，且:

---

* 收稿日期: 1990.08.02

$$F_i(\lambda)=O(|\lambda|^{1+\alpha})\quad \alpha\geqslant 1\text{为整数},\ i=1,\ 2 \tag{1}$$

1　有关线性抛物及双曲方程的结论

引理 1[8]. 对柯西问题

$$(B)\begin{cases}u_t-\triangle u=F(x,\ t)\\ u(x,\ 0)=\varphi_0(x)\end{cases}$$

i) 对任意整数$N\geqslant 0$，若$\varphi_0(x)\in W^{N+n+1,1}(R^n)\bigcap W^{n,1}(R^n)$，$F(x,\ t)=0$，则(B)有解$u=S(t)\varphi_0$成立．

$$\|S(t)\varphi_0\|_{W^{N,\infty}(R^n)}\leqslant C(1+t)^{\frac{-n}{2}}\|\varphi_0\|_{W^{N+n+1,1}(R^n)}\qquad \forall t\geqslant 0 \tag{2}$$

$$\|S(t)\varphi_0\|_{W^{N,1}(R^n)}\leqslant \|\varphi_0\|_{W^{N,1}(R^n)}\qquad \forall t\geqslant 0 \tag{3}$$

其中C是与t无关的常数．

ii) $\forall T>0$，若$\varphi_0\in H^{S+2}(R^n)$，$F\in L^2\ (0,\ T;\ H^S(R^n))$，其中$S\geqslant 0$为整数，则(B)存在唯一解$u=u(x,\ t)$满足:

$$u\in L^2\ (0,\ T;\ H^{S+2}(R^n));\qquad u_t\in L^2\ (0,\ T;\ H^S(R^n))$$

且成立:

$$\int_0^T\sum_{|s|\leqslant 2}\|D_x^2u\|^2_{H^s(R^n)}dt\leqslant C(\|\varphi_0\|_{H^{s+1}(R^n)}+\int_0^T\|F(t)\|^2_{H^s(R^n)}dt \tag{4}$$

其中C是与T无关的常数，必要时修改[0, T]上一个零测集上之值后，有:

$$u\in C([0,\ T];\ H^{S+1}(R^n))$$

若再假设$F(x,\ t)\in C([0,\ T];\ H^{S+1}(R^n))$，则还有:

$$u_t\in C([0,\ T];\ H^{S+1}(R^n))$$

引理2[8]. 设$\psi(x)$为具有紧支的适当光滑函数，当$n>1$时，柯西问题

$$(C)\begin{cases}u_{tt}-\triangle u=0\\ u(x,\ 0)=0,\qquad u_t(x,\ 0)=\psi(x)\end{cases}$$

的解$u(x,\ t)=S(t)\psi$成立．

$$\|S(t)\psi\|_{W^{N,\infty}(R^n)}\leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}\|\psi\|_{W^{N+n+1,1}(R^n)}$$

$$\|S(t)\psi\|_{W^{N,\infty}(R^n)}\leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}\|\psi\|_{W^{N+n,1}(R^n)}$$

$$\|\frac{\partial}{\partial t}DS(t)\psi\|_{W^{N,\infty}(R^n)}\leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}\|\psi\|_{W^{N+n+1,1}(R^n)}$$

$$\|S(t)\psi\|_{H^N(R^n)}\leqslant t\|\psi\|_{H^N(R^n)}$$

$$\|DS(t)\psi\|_{H^N(R^n)} \leqslant \|\psi\|_{H^N(R^n)}$$

$$\|\frac{\partial}{\partial t}DS(t)\psi\|_{H^N(R^n)} \leqslant \|\psi\|_{H^{N+1}(R^n)}$$

其中$N\geqslant 0$为任意整数，C是与T无关的常数。

引理3[8]. $\forall T>0$，若$\varphi(x)\in H^{S+1}(R^n)$，$\psi(x)\in H^S(R^n)$，$F(x,t)\in L^2(0,T;H^S(R^n))$，其中$S\geqslant 0$为整数，则柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\triangle u=F(x,t) \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

存在唯一解$u=u(x,t)$满足:

$$u\in L^\infty(0,T;\ H^{S+1}(R^n))$$

$$u_t\in L^\infty(0,T;\ H^S(R^n))$$

$$u_{tt}\in L^2(0,T;\ H^{S-1}(R^n))$$

利用磨光算子，我们可证得，在修改[0, T]上一个零测集上之值后，有:

$$u\in C([0,T];\ H^{S+1}(R^n))$$

$$u_t\in C([0,T];\ H^S(R^n))$$

若进一步假设$F(x,t)\in C([0,T];\ H^{S-1}(R^n))$，则还有:

$$u_{tt}\in C([0,T];\ H^{S-1}(R^n))$$

2 耦合方程组整体解的存在唯一性定理

对$S\geqslant n+5$，以及适当的正常数E，定义:

$$X_{S,E}=X^1_{S,E}\times X^2_{S,E}$$

$$X^1_{S,E}=\{\ u=u(x,t)|D^1_S(u)\leqslant E\ \} \tag{5}$$

$$X^2_{S,E}=\{\ V=V(x,t)|D^2_S(u)\leqslant E,\quad V(x,0)=\varphi(x)\ \} \tag{6}$$

其中：$\varphi(x)\in H^{S+1}(R^n)\bigcap W^{S-1,1}(R^n)$

$$D^1_S(u)=\sup_{t\geqslant 0}(1+t)^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{W^{S-n-3,\infty}(R^n)}+\sup_{t\geqslant 0}\|u(\cdot,t)\|_{W^{S,1}(R^n)}$$

$$+\left(\int_0^\infty\sum_{|K|=2}\|D^k_x u(\cdot,t)\|^2_{H^S(R^n)}dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$D^2_S(V)=\sup_{t\geqslant 0}(1+t)^{\frac{n-1}{2}}\|DV\|_{W^{S-n-2,\infty}(R^n)}+\sup_{t\geqslant 0}\|DV(\cdot,t)\|_{H^S(R^n)}$$

利用嵌入定理由式(5)、(6)可证得：$\forall u\in X^1_{S,E}$，$\forall V\in X^2_{S,E}$，有:

$$u\in L^\infty(0,\infty;\ W^{S-n-3,\infty}(R^n)) \tag{7}$$

$$u \in L^2(0, T; H^{S+2}(R^n)) \qquad \forall T > 0 \tag{8}$$

$$DV \in L^\infty(0, \infty; W^{S-n-2,\infty}(R^n)) \tag{9}$$

$$DV \in L^\infty(0, \infty; H^S(R^n)) \tag{10}$$

易证：$X_{S,E}$在度量$D_S(u, V) = D_S^1(u) + D_S^2(V)$下是一个非空的Banach空间.

下面证明本文的主要定理.

定理：设$F_1(\lambda)$，$F_2(\lambda)$充分光滑，且满足(1)，空间维数n满足$\frac{n-1}{2} > \frac{1}{\alpha-1}$，对$S \geqslant n+5$，存在适当小的$\delta$和E，使若：

$$\varphi_0(x) \in W^{S-2,1}(R^n) \cap H^{S+1}(R^n)$$

$$\varphi(x) \in W^{S-1,1}(R^n) \cap H^{S+1}(R^n)$$

$$\psi(x) \in W^{S-2,1}(R^n) \cap H^S(R^n)$$

且
$$\|\varphi_0(x)\|_{W^{S-2,1}(R^n)} + \|\varphi_0\|_{H^{S+1}(R^n)} + \|\varphi\|_{W^{S-1,1}(R^n)} + \|\varphi\|_{H^{S+1}(R^n)} + \|\psi\|_{W^{S-2,1}(R^n)} + \|\psi\|_{H^S(R^n)} \leqslant \delta E$$

则柯西问题(A)在$[0, \infty)$上存在唯一解$(u, V) \in X_{S,E}$，且必要时修改$[0, \infty)$上一个零测集上之值后，对$\forall T > 0$，有：

$$(D)\begin{cases} u \in L^2(0, T; H^{S+2}(R^n)) \cap C([0, T]; H^{S+1}(R^n)) \\ u_t \in L^2(0, T; H^S(R^n)) \cap C([0, T]; H^{S+1}(R^n)) \\ V \in C([0, T]; H^{S+1}(R^n)) \\ V_t \in C([0, T]; H^S(R^n)) \\ V_{tt} \in C([0, T]; H^{S-1}(R^n)) \end{cases}$$

证明：任取$(\tilde{u}, \tilde{V}) \in X_{S,E}$，作线性柯西问题：

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = F_1(\tilde{u}, D\tilde{V}, D_x\tilde{u}, D_x^2\tilde{u}) \\ V_{tt} - \triangle V = F_2(\tilde{u}, D\tilde{V}, D_x\tilde{u}, D_x^2\tilde{u}) \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad V(x, 0) = \varphi(x), \quad V_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

由引理1.3知，该柯西问题存在唯一解(u, V)，这样就定义了一个映射：

$$T_{pq}: \quad (\tilde{u}, \tilde{V}) \rightarrow (u, V) = T(\tilde{u}, \tilde{V})$$

下面把定理分成几条引理来证：

引理4. 若$(\tilde{u}, \tilde{V}) \in X_{S,E}$，$(u, V) = T_{pq}(\tilde{u}, \tilde{V})$，则必要时修改$[0, \infty)$上一个零测度集上之值后，对$\forall T > 0$，有：

$$u \in L^2(0, T; H^{S+2}(R^n)) \cap C([0, T]; H^{S+1}(R^n))$$

$$u_t \in L^2(0, T; H^S(R^n))$$

$$V \in L^2([0, T]; H^{S+1}(R^n))$$

$$V_t \in C([0, T]; H^S(R^n))$$

$$V_{tt} \in C([0, T]; H^{S-1}(R^n))$$

证明：由文[9]中的引理3.1及(7)－(10)可证得：

$$F_i(\tilde{u}, D\tilde{V}, D_x\tilde{u}, D_x^2\tilde{u}) \in L^2(0, T; H^S(R^n)) \qquad i = 1, 2$$

再由引理1及3可知：结论成立.

引理5 设δ、E适当小，则T_{pq}：$X_{S,E} \to X_{S,E}$.

证明：任取$(\tilde{u}, \tilde{V}) \in X_{S,E}$，要证$(u, V) = T(\tilde{u}, \tilde{V}) \in X_{S,E}$. 我们知道：

$$u(x, t) = S_1(t)\varphi_0 + \int_0^t S_1(t-\tau)F_1(\tilde{u}, D\tilde{V}, D_x\tilde{u}, D_x^2\tilde{u})d\tau \tag{11}$$

$$V(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(S_2(t)\varphi) + S_2(t)\psi + \int_0^t S_2(t-\tau)F_2(\tilde{u}, D\tilde{V}, D_x\tilde{u}, D_x^2\tilde{u})d\tau \tag{12}$$

其中，$S_1(t)$和$S_2(t)$分别是柯西问题(B)和(C)中的解算子.

先证$u \in X_{S,E}$.

由(11)利用文[9]中的引理3.1及(2)可证得：

$$\|u\|_{W^{s-n-3,\infty}(R^n)} \leqslant C(1+t)^{\frac{-n}{2}}(\delta E + E^{1+\alpha})$$

即：
$$\sup_{t\geqslant 0}(1+t)^{\frac{n}{2}}\|u\|_{W^{s-n-3,\infty}(R^n)} \leqslant C(\delta E + E^{1+\alpha}) \tag{13}$$

由(11)利用文[9]中的引理3.1及(3)可证得：

$$\|u\|_{W^{s,1}(R^n)} \leqslant \delta E + CE^{1+\alpha} \tag{14}$$

由(4)利用文[9]中的引理3.1可证得：

$$\int_0^\infty \sum_{|k|=2} \|D_x^k u\|^2_{H^s(R^n)} dt \leqslant C(\delta E)^2 + E^{2(1+\alpha)}] \tag{15}$$

综合(13)、(14)、(15)得：

$$D_S^1(u) \leqslant C(\delta + E^\alpha)E \tag{16}$$

由(12)利用与(16)类似的证法可得：

$$D_S^2(V) \leqslant CE(\delta + E^\alpha)$$

则：只要δ，E适当小，就有$D_S^1(u) \leqslant E$，$D_S^2(V) \leqslant E$.

故而$(u, V) = T_{pq}(\tilde{u}, \tilde{V}) \in X_{T,E}$.

引理6. 当δ，E适当小时，T_{pq}：$X_{S,E} \to X_{S,E}$是压缩映射.

证理：任取$(\tilde{u}_1, \tilde{V}_1)$，$(\tilde{u}_2, \tilde{V}_2) \in X_{S,E}$. 由引理5知，

$$(u_1, V_1) = T_{pq}(\tilde{u}_1, \tilde{V}_1) \in X_{S,E}$$

$$(u_2, V_2) = T_{pq}(\tilde{u}_2, \tilde{V}_2) \in X_{S,E}$$

记$u^* = u_1 - u_2$，$V^* = V_1 - V_2$，$\tilde{u}^* = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$，$\tilde{V}^* = \tilde{V}_1 - \tilde{V}_2$。

要证$\exists\, \eta$，$0 < \eta < 1$，使：

$$D_s(u^*, V^*) \leqslant \eta D_s(\tilde{u}^*, \tilde{V}^*)$$

由T_{pq}的定义，我们可得到：

$$\begin{cases} u_t^* - \triangle u^* = F_1(\tilde{u}_1, D\tilde{V}_1, D_x\tilde{u}_1, D_x^2\tilde{u}_1) - F_1(\tilde{u}_2, D\tilde{V}_2, D_x\tilde{u}_2, D_x^2\tilde{u}_2) \\ V_{tt}^* - \triangle V^* = F_2(\tilde{u}_1, D\tilde{V}_1, D_x\tilde{u}_1, D_x^2\tilde{u}_1) - F_2(\tilde{u}_2, D\tilde{V}_2, D_x\tilde{u}_2, D_x^2\tilde{u}_2) \\ u^*(x,0) = 0, \quad V^*(x, 0) = 0, \quad V_t^*(x, 0) = 0 \end{cases}$$

此线性问题存在唯一解，且显式表为：

$$u^*(x, t) = \int_0^t S_1(t-\tau)[F_1(\tilde{u}_1, D\tilde{V}_1, D_x\tilde{u}_1, D_x^2\tilde{u}_1) - F_1(\tilde{u}_2, D\tilde{V}_2, D_x\tilde{u}_2, D_x^2\tilde{u}_2)]d\tau \tag{17}$$

$$V^*(x, t) = \int_0^t S_2(t-\tau)[F_2(\tilde{u}_1, D\tilde{V}_1, D_x\tilde{u}_1, D_x^2\tilde{u}_1) - F_2(\tilde{u}_2, D\tilde{V}_2, D_x\tilde{V}_2, D_x^2\tilde{V}_2)]d\tau \tag{18}$$

其中$S_1(t)$和$S_2(t)$分别为柯西问题(B)和(C)的解算子．由(17)利用引理1及文[9]中的引理3.1可证得：

$$\|u^*\|_{W^{s-n-3,\infty}(R^n)} \leqslant CE^a D_s(\tilde{u}^*, \tilde{V}^*)(1+t)^{-\frac{n-1}{2}} \tag{19}$$

$$\|u^*\|_{W^{s,1}(R^n)} \leqslant CE^a D_s(\tilde{u}^*, \tilde{V}^*) \tag{20}$$

$$\int_0^\infty \sum_{|k|=2} \|D_x^k u^*\|_{H^s(R^n)}^2 d\tau \leqslant CE^{2a}[D_s(\tilde{u}^*, \tilde{V}^*)]^2 \tag{21}$$

由(18)利用引理2及文[9]中的引理3.1可证得：

$$\|DV^*\|_{W^{s-n-2,\infty}(R^n)} \leqslant CE^a D_s(\tilde{u}^*, \tilde{V}^*)(1+t)^{-\frac{n-1}{2}} \tag{22}$$

$$\|DV^*\|_{H^s(R^n)} \leqslant CE^a D_s(\tilde{u}^*, \tilde{V}^*) \tag{23}$$

综合(19)－(23)得：

$$D_s(u^*, V^*) \leqslant CE^a D_s(\tilde{u}^*, \tilde{V}^*)$$

取$\eta = CE^a$，则当E适当小时，即有$0 < \eta < 1$，且：

$$D_s(u^*, V^*) \leqslant \eta D_s(\tilde{u}^*, \tilde{V}^*)$$

定理的证明：∵当δ、E适当小时，由引理4–6可知，T_{pq}：$X_{S,E} \to X_{S,E}$是压缩映射．又$X_{S,E}$是完备的Banach空间，∴由Banach不动点原理可得：存在唯一$(u, V) \in X_{S,E}$，使$(u, V) = T_{pq}(u, V)$．由映射T_{pq}的定义知，$(u, V) \in X_{S,E}$是柯西问题(A)的唯一解．再由引理4可得(D)中各式成立．