

用分区混合有限元法求解 界面裂缝的缝端应力强度因子*

周鸿钧 段云岭**

(郑州工学院水利系)

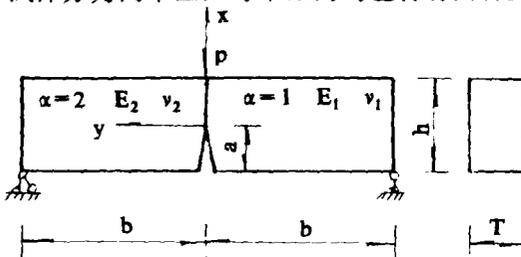
摘 要: 分区混合有限元法(简称混合法)^(1,2,3)是解决复杂工程结构裂缝问题的有效方法之一。目前主要用于均质材料中的裂缝问题。本文将混合法推广应用到界面裂缝之中,不仅扩大了混合法的应用范围,也较满意地解决了界面裂缝的复杂计算问题。

关键词: 分区混合有限元, 界面裂缝, 应力强度因子

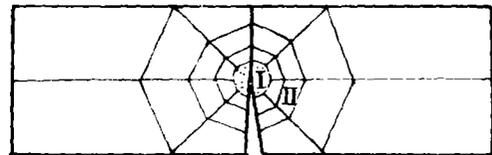
中国图书分类号: TV313

工程结构中经常要遇到两种介质材料交界面上的裂缝问题,例如水利工程中水坝与基础交界面上的裂缝。通常是将这种裂缝近似地视为均质材料中的裂缝来考虑,不能考虑材料特性的差异对裂缝的影响。若假定两种介质材料均为各向同性的线弹性体时,交界面上的裂缝就简化为界面裂缝。目前关于界面裂缝问题的研究尚少,文献〔4, 5, 6〕给出的界面裂缝缝端应力强度因子的几种求解方法,计算或实验的工作量相当大,而且不能直接得出缝端应力强度因子。我们尝试用分区混合有限元法来求解界面裂缝问题,不仅扩大了混合法的应用,对界面裂缝问题也初步取得了比较满意的结果。

以图1所示的三点弯曲界面裂缝试件为例,试件由两种介质材料组成,以x轴为界面,裂缝位于界面上,因材料不对称,须按整体考虑。网格划分形式如图2所示。将整个试件分为两个区,每个区内均包含有两种介质材料。



E_a : 弹性模量 ν_a : 泊松比
图1 三点弯曲裂缝梁



I: 余能区 II: 势能区
图2 网格形式

余能区: 缝端附近的区域,采用半径为D的圆形应力型奇异元,以应力作为变分自变量,应力强度因子 K_I 、 K_{II} 为基本未知量。

势能区: 奇异元以外的区域,采用八节点位移型等参元,以位移为变分自变量,结点

* 本文为水电部科学基金资助课题。

** 收稿日期: 1991-03-14

位移 $\{\omega\}$ 为基本未知量。基本未知量 K_I 、 K_{II} 、 $\{\omega\}$ 由分区变分原理的能量泛函 π 的驻值条件确定。

1 基本方程

分区混合总能量采用二类变量的混合能量泛函^(1,2)：

$$\pi = \pi_p - \pi_c + H_{pc} \quad (1)$$

式中 π_p 是势能区的总势能， π_c 是余能区的总余能， H_{pc} 是两区交界线 Γ 上的附加能量。

1.1 势能区的总能 π_p ：

由通常的有限元位移法可知，势能区的总势能 π_p 可由结点位移 $\{\omega\}$ 表示为：

$$\begin{aligned} \pi_p &= \frac{1}{2} \{\omega\}^T [K_p] \{\omega\} - \{\omega\}^T \{P\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} K_{ij} \omega_i \omega_j - \sum_{i=1}^{2n} P_i \omega_i \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $[K_p]$ 是势能区的刚度矩阵， $\{P\}$ 是势能区的结点荷载向量， n 是势能区的结点数。

1.2 余能区的总余能 π_c ：

在本问题中，余能区的总能量等于奇异单元的应变余能：

$$\pi_c = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\alpha\} d\Omega \quad (3)$$

式中 Ω 是奇异单元的面积。

化简后可得：

$$\pi_c = \frac{1}{2} K_I^2 V_{11} + \frac{1}{2} K_{II}^2 V_{22} + K_I K_{II} V_{12} \quad (4)$$

1.3 交界线 Γ 上的附加能量项 H_{pc} ：

$$H_{pc} = \int_{\Gamma} (T_x^c u_x^p + T_y^c u_y^p) ds \quad (5)$$

式中 T_x^c 、 T_y^c 是余能区在交界线 Γ 上的边界力， u_x^p 、 u_y^p 是势能区在 Γ 上的边界位移。

边界力 T_x^c 、 T_y^c 用余能区的应力表示为：

$$\begin{Bmatrix} T_x^c \\ T_y^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^c & \sigma_{xy}^c \\ \sigma_{xy}^c & \sigma_{yy}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ M \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中 l 、 m 是交界线 Γ 的外法线方向余弦。经变换和简化后得：

$$\begin{Bmatrix} T_x^c \\ T_y^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_{x_1}^c & \bar{T}_{x_2}^c \\ \bar{T}_{y_1}^c & \bar{T}_{y_2}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中：

$$\bar{T}_{x_1}^c = L y^{-\frac{1}{2}} e^{-\epsilon\theta} [m_a (3\cos\theta - 2\epsilon\sin\theta) - n_a e^{2\epsilon\theta}] \cdot \cos(t - \frac{1}{2}\theta)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{x_2}^{\alpha} &= \bar{T}_{x_1}^{\alpha} \operatorname{tg}(t - \frac{\theta}{2}) \\ \bar{T}_{y_1}^{\alpha} &= L\gamma^{-\frac{1}{2}} e^{-\epsilon\theta} \{m_{\alpha}[-\sin(t - \frac{3}{2}\theta) + \sin\theta(\cos(t - \frac{\theta}{2}) + 2\epsilon\sin(t - \frac{\theta}{2}))] \\ &\quad - n_{\alpha} e^{2\epsilon\theta} \sin(t - \frac{\theta}{2})\} \\ \bar{T}_{y_2}^{\alpha} &= L\gamma^{-\frac{1}{2}} e^{-\epsilon\theta} \{m_{\alpha}[\cos(t - \frac{3\theta}{2}) + \sin\theta(\sin(t - \frac{\theta}{2}) - 2\epsilon\cos(t - \frac{\theta}{2}))] \\ &\quad + n_{\alpha} e^{2\epsilon\theta} \cos(t - \frac{\theta}{2})\} \end{aligned} \quad (8)$$

边界位移 u_x^p, u_y^p 可用势能区的结点位移表示:

$$u_x^p = \sum_{i=1}^{n_1} N_i(S) u_i^x, \quad u_y^p = \sum_{i=1}^{n_1} N_i(S) u_i^y \quad (9)$$

式中 n_1 是交界线 Γ 上常规单元的结点个数, u_i^x, u_i^y 是 Γ 上结点 i 的位移分量, $N_i(s)$ 是形状函数, 表示交界线 Γ 上结点 i 沿某一坐标方向发生单位位移时, Γ 上其它结点沿同一方向所引起的位移函数, 可由常规单元 (等参元) 的形状函数 N_i' 推求。

对于图3所示的八结点等参元, 形状函数为:

$$N_i' = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) & (i = 1, 2, 3, 4) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0) & (i = 5, 6) \\ \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0) & (i = 7, 8) \end{cases} \quad (10)$$

$(\xi_0 = \xi_1 \cdot \xi, \quad \eta_0 = \eta_1 \cdot \eta)$

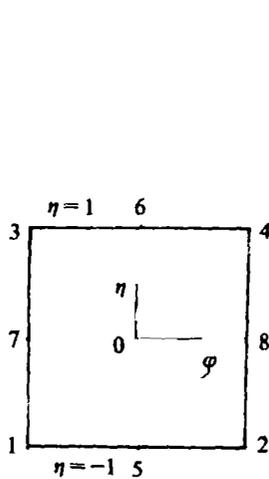


图3 八节点等参元

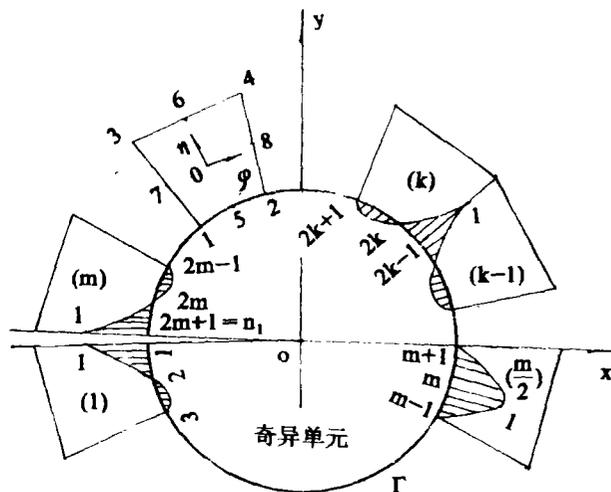


图4 形状函数 $N_i(s)$

如图 4 所示, 位于交界线 Γ 上每个常规单元, 只有结点 1, 2, 5 位于 Γ 上, 此三点的形状函数 N_i' 与 Γ 上的 $N_i(s)$ 有下述关系: 对于单元的中间结点如结点 $2k$, $N_i(s)$ 可由 N_i' 经坐标转换得到; 对于两单元的公共结点如结点 $(2k-1)$, $N_i(s)$ 是分段连续的, 分别由 k 单元的 N_i' 和 $(k-1)$ 单元的 N_i' 经坐标变换后得到. 其坐标转换就是将单元的局部坐标转化为整体坐标 (极坐标), 由此可得:

$$N_{2k}^{(a)} = N_1' |_{\eta=-1} = 1 - \xi_k^2$$

$$= -\left(\frac{m}{\pi}\right)^2 \theta^2 + 2\frac{m}{\pi}(2k - m' - 1)\theta - (2k - m' \times 2k - m' + 2)$$

$$(\theta_{2k-1} \leq \theta \leq \theta_{2k+1}) \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (11)$$

$$N_{2k-1}^{(a)} = \begin{cases} N_1' |_{\eta=-1} = -\frac{1}{2}(\xi_{k-1})(1 - \xi_{k-1}) \\ N_2' |_{\eta=-1} = \frac{1}{2}\xi_k(1 + \xi_k) \end{cases} \quad (12)$$

将式 (7)、(9) 代入式 (5), 经化简后得:

$$H_{pc} = K_I \sum_{i=1}^{2n_1} h_{1i} \omega_i + K_{II} \sum_{i=1}^{2n_2} h_{2i} \omega_i \quad (13)$$

式中 $h_{i,2j-1} = \int_p N_i(s) \overline{T_{xi}^a}(s) ds$

$$h_{i,2j} = \int_p N_i(s) \overline{T_{yi}^a}(s) ds \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

利用式 (8)、(11)、(12)、(14) 即可得参数 η_{ij}

1.3.1 中间结点 j ($j = 2k, 1 \leq k \leq m$)

$$h_{i,4k-1+\epsilon} = LD^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^3 A_j \left[\left(\frac{m}{\pi}\right)^2 B_i - 2\frac{m}{\pi}(2k - m' - 1)C_j \right]$$

$$+ (2k - m')(2k - m - 2)D_j \Big|_{\theta_{2k-1}}^{\theta_{2k+1}}$$

$$(i = 1, 2 \quad l = 0, 1) \quad (15)$$

式中: 当 $1 \leq k \leq \frac{m}{2}$ 时, $\alpha = 1$. 当 $\frac{m}{2} < k \leq m$ 时, $\alpha = 2$.

系数 A_j, B_j, \dots 如表 1 所示 θ_i 表示结点 i 对应的极角.

$\int_{\theta_i}^{\theta_j}$ 表示系数中的积分是从结点 i 到结点 j .

表 1 系数表

i	1	A ₁	A ₂	A ₃	B ₁	B ₂	B ₃	C ₁	C ₂	C ₃	D ₁	D ₂	D ₃
1	0	-3m _α	2 ∈ m _α	n _α	I ₁	I ₄	I ₇	I ₂	I ₅	I ₈	I ₃	I ₆	I ₉
	1	m _α	-2 ∈ m _α	n _α	I ₁₀ -I ₄	I ₁₃	I ₁₆	I ₁₁ -I ₅	I ₁₄	I ₁₇	I ₁₂ -I ₆	I ₁₅	I ₁₈
2	0	-3m _α	2 ∈ m _α	n _α	I ₁₉	I ₁₃	I ₁₆	I ₂₀	I ₁₄	I ₁₇	I ₂₁	I ₁₅	I ₁₈
	1	-m _α	2 ∈ m _α	-n _α	I ₂₂ +I ₁₃	I ₄	I ₇	I ₂₃ +I ₁₄	I ₅	I ₈	I ₂₄ +I ₁₅	I ₆	I ₉

注: $I_1 \sim I_{24}$ 是24个积分值, 积分公式列于附录.

1.3.2 公式结点 j ($j = 2k - 1, 2 \leq k \leq m$)

$$\begin{aligned}
 h_{i, 4k-3+i} &= \frac{LD^{\frac{1}{2}}}{\pi} \sum_{j=1}^3 (-A_j) \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 B_j - 2\frac{m}{\pi} (2k - m' - \frac{7}{8}) C_j \\
 &+ (2k - m' - 3)(2k - m' - 4) D_j \dot{f}_{\theta_{2k-3}}^{\theta_{2k-1}} \\
 &+ \frac{LD^{\frac{1}{2}}}{\pi} \sum_{j=1}^3 (-A_j) \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 B_j - 2\frac{m}{\pi} (2k - m' - \frac{1}{2}) C_j \\
 &+ (2k - m')(2k - m' - 1) D_j \dot{f}_{\theta_{2k-1}}^{\theta_{2k+1}} \\
 &\quad (i = 1, 2 \quad l = 0, 1)
 \end{aligned} \tag{16}$$

式中: 当 $2 \leq k \leq \frac{m}{2}$ 时, $\alpha = 1$

$$\text{当 } k = \frac{m}{2} + 1 \text{ 时, 分为两部分: } \begin{cases} \theta_{2k-1} \\ \theta_{2k-3} \end{cases} \text{ 取 } \alpha = 1, \begin{cases} \theta_{2k+1} \\ \theta_{2k-1} \end{cases} \text{ 取 } \alpha = 2$$

当 $\frac{m}{2} + 1 < k \leq m$ 时, $\alpha = 2$

1.3.3 缝面边界点 ($k = 1, k = m + 1$) .

缝面边界点的 η 参数相当于公共结点 $(2k - 1)$ 的参数的一部分:

$$\begin{aligned}
 \eta_{i, l+1} &= \frac{LD^{\frac{1}{2}}}{\pi} \sum_{j=1}^3 (-A_j) \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 B_j - 2\frac{m}{\pi} (2k - m' - \frac{1}{2}) C_j \\
 &+ (2k - m')(2k - m' - 1) D_j \dot{f}_{\theta_{2k-1}}^{\theta_{2k+1}} \\
 &\quad (k = 1 \quad i = 1, 2 \quad l = 0, 1 \quad \alpha = 1)
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{i, 2k_1-1+l} &= \frac{LD^{\frac{1}{2}}}{\pi} \sum_{j=1}^3 (-A_j) \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 B_j - 2\frac{m}{\pi} (2k - m' - \frac{7}{2}) C_j \\
 &+ (2k - m' - 3)(2k - m' - 4) D_j \dot{f}_{\theta_{2k-3}}^{\theta_{2k-1}} \\
 &\quad (k = m + 1, \quad i = 1, 2 \quad l = 0, 1 \quad \alpha = 2)
 \end{aligned} \tag{18}$$

1.4 基本方程

将式 (2)、(4)、(13) 代入式 (1) 即可得分区混合总能量 π :

$$\begin{aligned}
 \pi &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} k_{ij} \omega_i \omega_j - \sum_{i=1}^{2n} P_i \omega_i - \frac{1}{2} K_I V_{11} - \frac{1}{2} K_{II} V_{22} \\
 &\quad - K_I K_{II} V_{12} + K_I \sum_{i=1}^{2n_1} h_{1i} \omega_i + K_{II} \sum_{i=1}^{2n_2} h_{2i} \omega_i
 \end{aligned} \tag{19}$$

混合法的方程由分区混合能量原理导出: 基本未知量的真实解应使泛函 π 为驻值:

$$\delta\pi = \delta(\pi_p - \pi_c + H_{pc}) = 0 \tag{20}$$

将式(19)代入可得:

$$K_I = \sum_{i=1}^{2n_1} \frac{V_{22}h_{1i} - V_{12}h_{2i}}{V_{11}h_{22} - V_{12}^2} \cdot \omega_i \tag{21}$$

$$K_{II} = \sum_{i=1}^{2n_1} \frac{V_{11}h_{2i} - V_{12}h_{1i}}{V_{11}h_{22} - V_{12}^2} \cdot \omega_i \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^{2n_1} k_{ij}^* \omega_j = P_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2n) \tag{23}$$

式中:

$$K_{ij}^* = \begin{cases} K_{ij} + \frac{h_{1j}(V_{22}h_{1i} - V_{12}h_{2i}) + h_{2j}(V_{11}h_{2i} - V_{12}h_{1i})}{V_{11}V_{22} - V_{12}^2} \\ \quad (i = 1, 2, \dots, 2n_1, \quad j = 1, 2, \dots, 2n_1) \\ K_{ij}, \text{ (其余各项)} \end{cases} \tag{24}$$

式 (23) 即为仅含有结点位移 $\{\omega\}$ 未知量的基本方程组。

由此方程组和式 (24) 可以看出, 只要将通常的有限元的刚度矩阵的前 $2n_1 \times 2n_2$ 阶子阵引入断裂参数进行修改即可得到反映断裂特性的刚度矩阵, 按常规的线性方程组的解法求解出结点位移 $\{\omega\}$ 后, 即可由式 (21)、(22) 求解出应力强度因子 K_I 、 K_{II} 。

2 界面裂缝的计算分析

计算试件如图 1 所示, 取 $D=2$, $m=1$, $T=1$, $P=1$, $\alpha=0.5$, 弹性模量按:

$E_2 = 1 \times 10^4 \text{kg/cm}^2$ $E_1/E_2 = 1, 1.2, 1.5, 2, 3, \dots, 10$. 取值, 为简便计, 取 $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ (石膏试件), 按平面应变问题考虑。

计算结果如图 5, 可以看出:

2.1 界面裂缝的应力强度因子, 仅与两种介质材料的弹性模量的相对值有关, 与各自的绝对大小无关。

2.2 由于两种介质材料的弹性模量不同, 使得交界面上产生了剪力作用, 从而对于纯工型荷载也产生了 II 型应力强度因子。在交界面上, 弹性模量大的一方对小的一方相当于附加了约束, 阻止了该方向上的变形继续增大。

2.3 应力强度因子 K_I 、 K_{II} 随着两种介质材料的弹性模量比的增大而增大, 但增大的速度不同。在 $1 < E_1/E_2 < 2.5$ 区间, K_I 增大的速度优于 K_{II} 的速度; 而在 $2.5 < E_1/E_2 < 10$ 区间, K_{II} 的增大速度优于 K_I 的增大速度。

2.4 当弹性模量之比 E_1/E_2 在 1~2 区间内变化时, $K_I S \sim E_1/E_2$ 曲线较陡, 说明 K_I 受弹模化的影响较大; E_1/E_2 大于 2 以后, 曲线逐渐减缓, E_1/E_2 对 K_I 的影响随着 E_1/E_2 增大而逐渐减小; 当 $E_1/E_2 > 5$ 以后, 曲线接近水平, E_1/E_2 的继续增大, 对 K_I 不再产生显著的影响。

从 $K_I S \sim E_1/E_2$ 曲线可以看出, E_1/E_2 在 1~4 之间变化时, 曲线较陡, 说明在这区

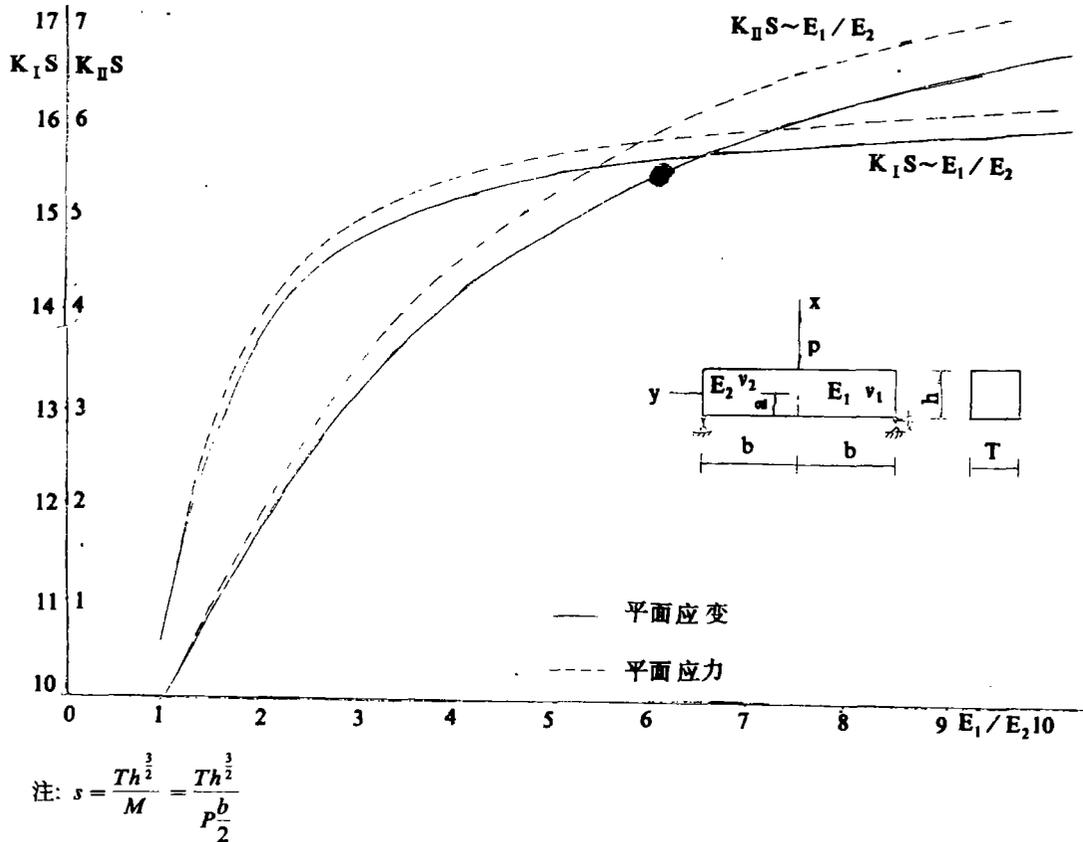


图5 应力强度因子随 E_1/E_2 变化曲线

间内 K_{II} 受弹模比影响较大; 之后, 曲线略有减缓但不太明显。可见 E_1/E_2 对 K_{II} 的影响一直都较大。

如果将界面裂缝的缝端应力强度因子相对于均质材料裂缝 (也即 $E_1/E_2=1$ 时) 的应力强度因子的增加部分定义为附加应力强度因子, 则附加应力强度因子随两介质材料的弹模比变化, 图5中的曲线经过适当的坐标平移后即为附加应力强度因子的变化曲线, 对比曲线进行回归分析, 可得近似计算公式:

$$\begin{aligned}
 K_I S_{附} &= 1.25889 \ln(E_1/E_2 - 0.9188) + 2.995886 \\
 K_{II} S_{附} &= 3.123779 \ln(E_1/E_2) - 0.2063837
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

此组近似公式与上述计算点的相关系数为0.99217和0.99848。

界面裂缝的缝端应力强度因子可以用附加应力强度因子表示为:

$$\begin{aligned}
 K_i S &= K_i S' + K_i S_{附} \\
 (i &= I, II)
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

式中 $K_i S'$ 是按均质材料中的裂缝计算方法得出的缝端应力强度因子。

利用式 (25)、(26) 可以简单地对三点弯曲界面裂缝试件进行近似计算, 而不必进行复杂的界面裂缝计算。

文献〔8〕用激光散斑照相的实验方法对三点弯曲界面裂缝试件进行了实验研究, 将本文的计算结果化成与文献〔8〕的相同形式, 一并绘于图6, 由图6可以看出, 计算结果与实验结果具有很好的一致性, 其最大相对误差为-6.7%, 最小为0.46%, 计算结果和实验结果得以相互印证。

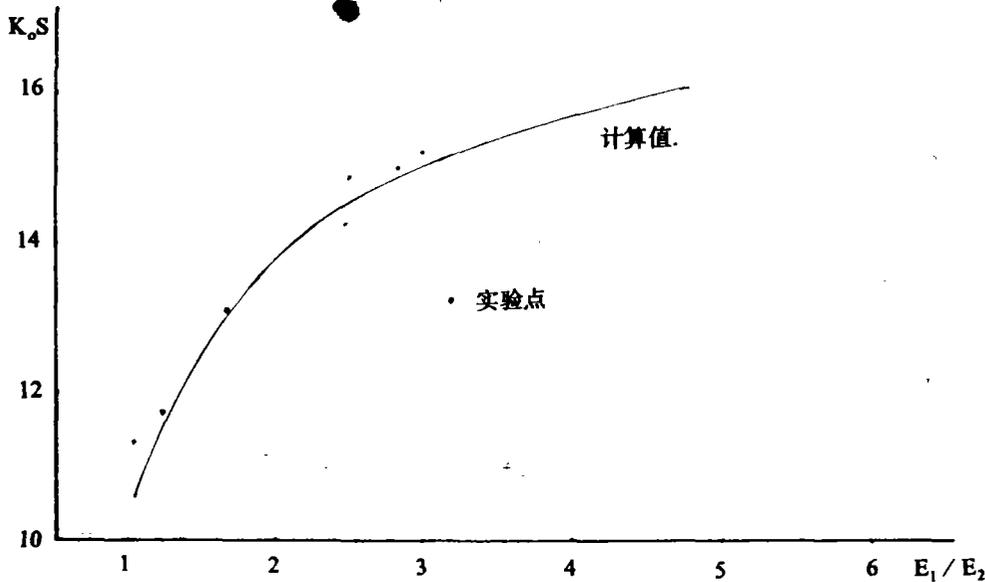


图6 实验结果与计算结果比较

3 结 语

分区混合有限元法在均质材料裂缝问题中已得到较广泛的应用, 本文将其推广应用到界面裂缝之中, 进一步扩大了混合法的应用范围, 并且初步解决了界面裂缝的复杂计算问题, 得出了一些有益的结论。

3.1 界面裂缝的缝端应力强度因子仅与两种介质材料的弹性模量的相对大小有关, 与其绝对大小无关。

3.2 由于两种介质材料的弹性模量的差异, 使材料不连续处也产生了应力集中现象, 对于纯 I 型荷载的裂缝问题也产生了 II 型应力强度因子, 即在界面上产生了剪切效应。这个剪切效应随着材料特性的差异增大而增大, 一般的均质材料中的裂缝计算方法不能够反映出这个剪切效应。本文试图用附加应力强度因子的概念来近似地反映这个效应。

3.3 当两种介质材料的弹模比在 1~2 之间变化时, 界面裂缝的缝端应力强度因子变化很大, 一般工程结构中复合材料的弹性模量的差异大多在此范围, 所以对复合材料中的裂缝进行断裂分析时, 应重视弹模的差异。

附 录

24 个积分公式

$$\begin{aligned}
 (21) \quad I_1 &= \int e^{-\epsilon\theta} \theta^2 \cos\theta \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta \\
 &= \frac{1}{1+4\epsilon^2} [2e^{-\epsilon\theta} \theta^2 \cdot \sin(t_1 - \frac{\theta}{2})(\cos\theta + 2\epsilon \sin\theta) + 2(1+2\epsilon^2)I_{22} \\
 &\quad - 2\epsilon(I_{10} + 4I_{14}) - 4I_{20}] \\
 (17) \quad I_2 &= \int e^{-\epsilon\theta} \theta \cos\theta \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta \\
 &= \frac{1}{1+4\epsilon^2} [2e^{-\epsilon\theta} \theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2})(\cos\theta + 2\epsilon \sin\theta) + 2(1+2\epsilon^2)I_{23} \\
 &\quad - 2\epsilon(I_{11} + 2I_{15}) - 2I_{21}] \\
 (3) \quad I_3 &= \int e^{-\epsilon\theta} \cos\theta \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta \\
 &= \frac{1}{1+4\epsilon^2} [2e^{-\epsilon\theta} \sin(t_1 - \frac{\theta}{2})(\cos\theta + 2\epsilon \sin\theta) + 2(1+2\epsilon^2)I_{24} - 2\epsilon I_{12}] \\
 (22) \quad I_4 &= \int e^{-\epsilon\theta} \theta^2 \sin\theta \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta \\
 &= 2e^{-\epsilon\theta} \theta^2 \sin\theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) + 2\epsilon(I_{22} - I_1) - 4I_{14} - 2I_{10} \\
 (18) \quad I_5 &= \int e^{-\epsilon\theta} \theta \sin\theta \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta \\
 &= 2e^{-\epsilon\theta} \theta \sin\theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) + 2\epsilon(I_{23} - I_2) - 2(I_{15} + I_{11}) \\
 (14) \quad I_6 &= \int e^{-\epsilon\theta} \sin\theta \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta \\
 &= 2e^{-\epsilon\theta} \sin\theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) + 2\epsilon(I_{24} - I_3) - 2I_{12} \\
 (5) \quad I_7 &= \int e^{\epsilon\theta} \theta^2 \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta \\
 &= \frac{2}{1+4\epsilon^2} [e^{\epsilon\theta} \theta^2 (2\epsilon \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) - \sin(t_1 - \frac{\theta}{2})) + 2I_{17} - 4\epsilon I_{18}] \\
 (3) \quad I_8 &= \int e^{\epsilon\theta} \theta \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta \\
 &= \frac{2}{1+4\epsilon^2} [e^{\epsilon\theta} \theta (2\epsilon \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) - \sin(t_1 - \frac{\theta}{2})) + I_{18} - 2\epsilon I_9] \\
 (1) \quad I_9 &= \int e^{\epsilon\theta} \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta = \frac{2e^{\epsilon\theta}}{1+4\epsilon^2} [2\epsilon \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) - \sin(t_1 - \frac{\theta}{2})]
 \end{aligned}$$

$$(12) I_{10} = \int e^{-\epsilon\theta} \theta^2 \sin(t_1 - \frac{3\theta}{2}) d\theta = \frac{2}{3} [e^{-\epsilon\theta} \theta^2 \cos(t_1 - \frac{3\theta}{2}) + \epsilon I_{22} - 2I_{23}]$$

$$(10) I_{11} = \int e^{-\epsilon\theta} \theta \sin(t_1 - \frac{3\theta}{2}) d\theta = \frac{2}{3} [e^{-\epsilon\theta} \theta \cos(t_1 - \frac{3\theta}{2}) + \epsilon I_{23} - I_{24}]$$

$$(7) I_{12} = \int e^{-\epsilon\theta} \sin(t_1 - \frac{3\theta}{2}) d\theta = \frac{2e^{-\epsilon\theta}}{9 + 4\epsilon^2} [-2\epsilon \sin(t_1 - \frac{3\theta}{2}) + 3\cos(t_1 - \frac{3\theta}{2})]$$

$$(23) I_{13} = \int e^{-\epsilon\theta} \theta^2 \sin\theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta = I_{22} - I_1$$

$$(14) I_{14} = \int e^{-\epsilon\theta} \theta \sin\theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta = I_{23} - I_2$$

$$(15) I_{15} = \int e^{-\epsilon\theta} \sin\theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta = I_{24} - I_3$$

$$(6) I_{16} = \int e^{-\epsilon\theta} \theta^2 \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta = 2e^{\epsilon\theta} \theta^2 \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) - 2\epsilon I_7 - 4I_8$$

$$(4) I_{17} = \int e^{\epsilon\theta} \theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta = 2e^{\epsilon\theta} \theta \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) - 2\epsilon I_8 - 4I_9$$

$$(2) I_{18} = \int e^{\epsilon\theta} \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta = 2e^{\epsilon\theta} \cos(t_1 - \frac{\theta}{2}) - 2\epsilon I_9$$

$$(24) I_{19} = \int e^{-\epsilon\theta} \theta^2 \cos\theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta = I_{10} + I_4$$

$$(20) I_{20} = \int e^{-\epsilon\theta} \theta \cos\theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta = I_{11} + I_5$$

$$(16) I_{21} = \int e^{-\epsilon\theta} \cos\theta \sin(t_1 - \frac{\theta}{2}) d\theta = I_{12} + I_6$$

$$(11) I_{22} = \int e^{-\epsilon\theta} \theta^2 \cos(t_1 - \frac{3\theta}{2}) d\theta \\ = \frac{2}{9 + 4\epsilon^2} [e^{-\epsilon\theta} \theta^2 (-3\sin(t_1 - \frac{3\theta}{2}) - 2\epsilon \cos(t_1 - \frac{3\theta}{2})) + 4\epsilon I_{23} + 6I_{11}]$$

$$(9) I_{23} = \int e^{-\epsilon\theta} \theta \cos(t_1 - \frac{3\theta}{2}) d\theta \\ = \frac{2}{9 + 4\epsilon^2} [e^{-\epsilon\theta} \theta (-3\sin(t_1 - \frac{3\theta}{2}) - 2\epsilon \cos(t_1 - \frac{3\theta}{2})) + 2\epsilon I_{24} + 3I_{12}]$$

$$(8) I_{24} = \int e^{-\epsilon\theta} \cos(t_1 - \frac{3\theta}{2}) d\theta \\ = \frac{2e^{-\epsilon\theta}}{9 + 4\epsilon^2} [-3\sin(t_1 - \frac{3\theta}{2}) - 2\epsilon \cos(t_1 - \frac{3\theta}{2})]$$

注：括号内的数值表示计算顺序。

参 考 文 献

- (1) Long yuqiu, et al. Sub-region Mixed Finite Element Method for the Calculation of Stress Intensity Factor, Proceedings of the Conference on Finite Element Methods, Shanghai, China. (1982) .PP.138~140,或《力学学报》.4 (82) .PP.341~353.
- (2) 单健, 混合采用应力型奇异元和位移型常规元计算应力强度因子.清华大学: 1981 (硕士论文)
- (3) 赵毅强, 尤取球, 分区混合有限元法求混合型应力强度因子, 计算结构力学及其应用, 1 (84), PP.47~55
- (4) R.E.Smelser, Evaluation of Stress Intensity Factors for Bimaterial Bodies using Numerical Crack Flank Displacement Data. Int.J. of Fract.15 (1979), PP.135~143
- (5) Hong and M. storn.The computation of stress Intensity Factors in Dissimilar Materials.J.of Elasticity, 8 (1978), PP.31~34
- (6) K.Y.Lin and J.W.Mar, Finite Element Analysis of Stress Intensity Factors for Cracks at a Bimaterial Interface.Int.J.Fract. 12 (1976) .PP.521~531
- (7) 周鸿钧, 段云岭, 用散斑照相法确定界面裂纹的应力强度因子.实验力学, 1986, 第4期
- (8) 周鸿钧, 段云岭, 异弹横界面裂纹缝端应力场计算.郑州工学院学报, 1986年, 第1期

The computation of Stress Intensity Factors of Interface Crack by using Sub-Region Mixed Finite Element Method

Zhou Hongjun Duan Yunling
(Dept.of Hyelraulic Engineering)

Abstract: The sub-region mixed finite element method is an efficient method for crack problem of complicated engineering structures.Up to the present this method is only applied to solve the crack problem in honogeneous material

This paper extended sub-region mixed method to calculate the stress intensify factors along the interface crack in bimaterial.A three-point bending beam with an edge crack is computed.The numerical results are compared with experimental data by Laser photograph and the comparision of which shows good agrcement.

Keywords: sub-region Mixed Finite Element Method, Interface Crack, Stress Intensity Factors.