第12卷 第4期　　郑州工学院学报　　Vol.12 No.4
1991年 12 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Dec. 1991

具有一对主导极点的最优调节器设计*

冯冬青　　谢宋和

(郑州工学院计算机与自动化系)　(郑州轻工业学院控制工程系)

摘　要: 本文分析了单输入线性定常可控系统开环特征多项式和最优闭环特征多项式与二次型指标中Q阵的关系，提出了一种具有一对期望主导极点的线性二次型最优调节器设计方法．该方法简单，计算容易，便于在实际工程设计中应用．

关键词: LQ问题，最优控制，主导极点，最优极点配置．

中国图书分类号: TP273.1

应用最优控制理论设计的最优控制系统，不仅具有较强的稳定性能，有一定的频响带宽或满足任意一种与古曲控制理论有关的约束要求，而且可以认为它在某一特定的范围内是可能的系统中最优的．所以最优控制系统的设计方法受到了广泛地重视．

在最优控制系统的设计中，基于二次型指标最优的方法是应用最广泛、最有效的设计方法．但是工程实际问题往往是针对时域指标提出要求的，而如何根据时域指标确定二次型指标中的Q阵，尚无一般方法．然而我们可以知道系统闭环极点与时域指标的近似关系，文献[1]中提出了一种依据系统全部希望闭环极点确定Q阵的方法，但计算较复杂且不便用计算机求解．事实上，高阶系统的时域性能主要取决于少数闭环主导极点，我们通过分析单输入线性定常可控系统特征多项式及其最优闭环特征多项式与Q阵之间的关系，提出一种选择Q阵的方法，把少数极点配置在希望的主导极点位置上，而把其他极点配置在非主导极点的范围内．因为通常系统的主导极点只取两个，所以这种方法非常简单，便于工程应用．

1　系统特征多项式与Q阵的关系

对于任何一个单输入可控系统来说，总存在一个非奇异矩阵将其变换成可控标准形系统，所以我们考虑可控标准形系统

$$\dot{X} = AX + bu \tag{1.1}$$

* 收稿日期: 1990.05.05

其中

$$A=\begin{bmatrix} & \vdots & & \\ 0 & \vdots & I_{n-1} & \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix},\qquad b=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

给定线性二次型指标

$$J=\int_0^\infty (X^TQX+u^2)dt \tag{2.2}$$

其中，$Q=Q^T\geqslant 0$，则有最优控制律

$$u=-KX \tag{2.3}$$

其中，$K=b^TP$，这里的P阵满足Riccati方程

$$PA+A^TP\ Pbb^TP+Q=0 \tag{2.4}$$

令$\Psi_0(s)=\det(sI-A)$，$\Psi_c^T(s)=\det(sI-A+bK)$，

则有[2]

$$\Psi_c(s)\Psi_c(-s)-\Psi_0(s)\Psi_0(-s)=[\mathrm{adj}(-sI-A)b]^TQ[\mathrm{adj}(sI-A)b] \tag{2.5}$$

这里，$\mathrm{adj}(sI-A)b=[1\ s\ s^2\cdots s^{n-1}]^T$

$$\mathrm{adj}(-sI-A)b=[1\ -s\ s^2\cdots(-1)^{n-1}s^{n-1}]^T$$

取一$\hat{Q}$阵使其元素$\hat{q}_{ij}$和Q阵的元素q_{ij}满足关系$\hat{q}_{ij}=(-1)^{i-1}q_{ij}$，则得到

$$\Psi_c(s)\Psi_c(-s)-\Psi_0(s)\Psi_0(-s)=[1\ S\ S^2\cdots s^{n-1}]\hat{Q}[1\ s\ s^2\cdots s^{n-1}]^T \tag{2.6}$$

式（2.6）描述了开环特征多项式$\Psi_0(s)$和闭环特征多项式$\Psi_c(s)$与Q阵之间的解析关系。并且在展开式（2.6）右边后可以发现：

① Q阵的元素q_{ij}中$i+j$为奇数的元素将不出现，它们对闭环特征多项式$\Psi_c(s)$没有影响，也就是说不影响最优反馈增益K阵；

② 对于任意两个正半定权阵Q_1和Q_2来说，有其对应的$\hat{Q}_1$和$\hat{Q}_2$阵中过主对角线元素的代数和以及垂直于主对角线的直线上元素的代数和分别对应相等，那么，由Q_1和Q_2可以得到相同的闭环特征多项式$\Psi_c(s)$，即有相同的最优反馈增益K阵。

定义：在线性二次型最优控制中，若由两个不同的权阵Q_1和Q_2可以得到相同的最优反馈增益K阵，则称Q_1和Q_2是闭环等价的。记闭环等价的权阵的集合为$\Omega(Q)$。

性质1　若Q_1，Q_2，…，$Q_n\in\Omega(Q)$，则

$$Q=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Q_i\in\Omega(Q)$$

性质2　若Q_1，$Q_2\in\Omega(Q)$，α，$\beta>$，则

$$Q=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha Q_1+\beta Q_2)\in\Omega(Q)$$

性质3 与任一权阵Q闭环等价的对角阵为

$$Qd = \mathrm{diag}\{q_{11},\ q_{22} - 2q_{13}, \cdots, q_{ii} + 2\sum_{j=1}^{i} q_{(i-j)(i+j)}, \cdots, q_{nn}\}$$

例如，某二阶可控系统

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

取权阵Q分别为

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ Q_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ Q_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

其对应的的最优反馈增益阵均为

$$K = [2 \quad 4]$$

且对应的最优闭环系统的极点为−1 和−2.

由此可见，对于单输入线性定常可控标准形系统，选择 Q 阵为对角阵是不失一般性的. 若 Q 阵为对角阵，即

$$Q = \mathrm{diag}\{q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n\} \tag{2.7}$$

则 (2.6) 式可简化为

$$\Psi_c(s)\Psi_c(-s) = \Psi_0(s)\Psi_0(-s) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i q_{i+1} s^{2i} \tag{2.8}$$

显然，(2.8) 式比较直观地反映了开、闭环系统特征多项式与 Q 阵之间的关系，若已知开环系统 (2.1) 式和 Q 阵 (2.7) 式，就可以很容易通过因式分解求得闭环特征多项式 $\Psi_c(s)$，从而可以直接确定最优反馈增益 K 阵，而不必求解非线性矩阵代数 Riccati 方程。

2 主导极点配置

若将原性能指标 (2.2) 改为[1]：

$$J = \int_0^{+\infty} [\rho X^T Q X + u^2] dt \tag{3.1}$$

则有

$$\Psi_c(s)\Psi_c(-s) = \Psi_0(s)\Psi_0(-s) + \rho Q(s)$$

$$PA + A^T P - Pbb^T P + \rho Q = 0 \tag{3.3}$$

$$K = b^T P \tag{3.4}$$

其中，$\rho > 0$，$q(s) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i q_{i+1} s^{2i}$

由 (3.2) 式可知[2]，当 ρ 趋于无穷大时，$\Psi_0(s)\Psi_0(-s) + \rho q(s)$的保持有限值的零点必趋于 q(s)的零点，而其余零点必趋于无穷大. 也就是说，若 q(s)的最高次项的指数为 2m，则闭环系统的 m 个极点趋于有负实部的 q(s)的零点，而其余

n−m 个极点趋于方程

$$S^{2(n-m)} = (-1)^{n-m+1}\rho q_{m+1} \tag{2.5}$$

有负实部的根，且后一种极点是以一定形式分布在半径为$(\rho q_{m+1})^{\frac{1}{2(n-m)}}$的一个圆周上。

因此，对于一个 $n \geq 3$ 的单输入线性可控标准形系统来说，若希望最优闭环系统只有两个主导极点 λ_1 和 λ_2，我们可以选择 Q 阵为

$$Q + \mathrm{diag}\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0\} \tag{2.6}$$

则有

$$q(s) = q_3 s^4 - q_2 s^2 + q_1 \tag{2.7}$$

且有

$$\begin{aligned}&(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\\&= s^4 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)s^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2\end{aligned} \tag{2.8}$$

比较（3.7）式和（3.8）式有

$$q_1 / q_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2, \qquad q_2 / q_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \tag{2.9}$$

这样便可求得 Q 阵所有元素的值，且当 ρ 趋于无穷大时，最优闭环系统具有预期的闭环主导极点λ_1 和 λ_2。

关于 ρ 值的选择，因为 ρ 越大，最优增益 K 阵的某些分量也越大，就越可能出现饱和现象，所以我们选择适当大的 ρ，保证 q(s)的两个具有负实部的零点确是最优闭环系统的主导极点，而使闭环系统其余极点负实部的绝对值大于或等于两个主导极点λ_1 和 λ_2 负实部绝对值较大一个的 δ 倍以上，即

$$\left|R_e(\lambda_i)\right| \geqslant \delta\max\{\left|R_e(\lambda_1)\right|,\left|R_e(\lambda_2)\right|\} \tag{2.10}$$

其中，$i = 3,\ 4,\ \cdots,\ n$，且 λ_i 为闭环系统的非主导极点。

因为[3]，当 $\rho \to \infty$时，最优闭环系统极点中有两个趋近于λ_1 和 λ_2，其余 n−2 个极点沿着渐近线趋于无穷，且这些较近线和实轴的夹角为

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2l+1}{2(n-2)}\pi\ ,\quad l = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-3 \tag{2.11}$$

同时因为渐近线通过[s]平面的原点，所以，在渐近线上的点至原点的距高近似为$(\rho q_3)^{\frac{1}{2(n-2)}}$。

这样，当 ρ 趋于无穷大时，闭环系统非主导极点的近似实部为

$$\begin{aligned}&R_e(\lambda_i) = -(\rho q_3)^{\frac{1}{2(n-2)}}\sin\left(\frac{2i-5}{2n-4}\pi\right),\\&\quad i = 3,\ 4,\ \cdots,\ n.\end{aligned} \tag{2.12}$$

可见，非主导极的实部绝对值中的最小值为

$$\min_i\left|R_e(\lambda_i)\right| = (\rho q_3)^{\frac{1}{2(n-2)}}\sin\frac{\pi}{2n-4} \tag{2.13}$$

因此，应选择ρ充分大，以满足

$$(\rho q_3)^{\frac{1}{2(n-2)}}\sin\frac{\pi}{2n-4} \geqslant \delta C \tag{2.14}$$

即 $$\rho \geqslant \frac{1}{q_3}(\delta C \cdot CSC\frac{\pi}{2n-4})^{2(n-2)} \tag{2.15}$$

其中，

$$C = Max\{|R_e(\lambda_1)|, R_e|(\lambda_2)|\}$$

例如，当$n=3$，$\delta=5$，$q_3=1$时，ρ应满足

$$\rho \geqslant 25C^2$$

3 举　例

某三阶可控系统

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

取线性变换阵T为

$$T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

则经线性变换$\hat{X}=TX$　后有

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

若要求闭环系统主导极点为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$，则由（3.9）式得

$$q_1/q_3 = 36 \quad , \quad q_2/q_3 = 13$$

若取$q_3=1$，$\delta=5$，则有

$$q_1 = 36 \quad , \quad q_2 = 13 \quad , \quad \delta \geqslant 225$$

$$q(S) = S^4 - 13S^2 + 36 \tag{3.3}$$

又 $$\Psi_0(S) = S^3 + 3S^2 + 2S$$

$$\Psi_0(S)\Psi_0(-S) = -S^6 + 5S^4 - 4S^2 \tag{3.4}$$

则 $$\Psi_c(S)\Psi_c(-S) = S^6 + (5+\rho)S^4 - (4+13\rho)S^2 + 36\rho \tag{3.5}$$

当$\rho=225$时，由（4.5）式可得闭环系统特征值为：

$$S_1 = -2, \quad S_2 = -3.05725, \quad S_3 = -14.71915$$

且 $S_3/S_2 \approx 4.8$，$S_1=\lambda_1$，$S_2 \approx \lambda_2$

希望主导极点配置的精度达到98.1%，最优增益阵

$\hat{K} = [90.000 \quad 78.553 \quad 16.776]$，$K = [9.000 \quad 4.5001 \quad 1.6776]$.

若希望提高极点配置精度可增大ρ值，当$\rho = 300$时，有闭环系统特征值：

$S_1 = -2$，$S_2 = -3.04215$，$S_3 = -17.0805$

且$S_3 / S_2 \approx 5.6$，$S_1 = \lambda_1$，$S_2 \approx \lambda_2$，

希望主导极点配置的精度达到 98.6%.

4 结　论

理论分析和应用举例表明，与已知的其它最优极点配置方法相比，本文提出的具有一对期望主导极点的最优调节器设计方法具有方法简单、计算容易的优点，便于在实际工程设计中应用。

参　考　文　献

〔1〕 B.D.O.安德森　J.B.莫尔　线性最优控制　科学出版社　1982年版

〔2〕 R.E.Kalman, When is a Linear Control System Opeimal, Trans ASME(D), Vol.86　No.1　1964

〔3〕 何关钰　线性控制系统理论　辽宁人民出版社　1982年版

Design of the Optimal Regulator with a Pair of Dominant Pole

Feng Dong qing
(Zhengzhou Institute of Technology)
Xie Song he
(Zhengzhou Institute of Light Industry)

Abstract: The relation among the open—loop characteristic polynomial for a single input linear constant controllable system and the optimal closed—coop characteristic polynomial and the weighting matrix Q in the quadratic performance index is analysed in this paper.a linear quadratic optimal reaulator with a pair of dominant pole is presented. The design method is simple and easy, so it can be used in practical engineering.

Keywords: LQ problem, Opeimal control, dominant poles, optimal—pole assignment