

# 大坝安全监控的多测点位移 数学模型研究<sup>①</sup>

陆绍俊

(江苏省南京市河海大学)

**摘 要:** 坝体变形是原型监测的主要内容之一,它是分析大坝结构性态的重要依据。目前,位移数学模型都是对单个测点建立的,而不考虑测点之间的相互关系。本文运用数学分析和坝工理论,提出建立坝体位移分布模型,将各点测值通过坐标变量有机地结合起来,得到位移分布与外荷载之间的数学关系式。最后结合某实际工程的原型观测资料,对建立分布模型的具体方法作了介绍,并建立了坝体挠曲线确定性模型,成果令人满意。

**关键词:** 原型监测、坝体变形、分布模型

**中国图书分类号:** TV698

坝体变形是原型监测的主要监测量,其变化直接反映了大坝工作性态,因此分析坝体变形规律,建立位移监控预报方程是判断坝体结构性态正常与否的重要依据,对于保证大坝安全运行具有十分重要的意义。

目前,大坝安全监控主要采用三种模型,即确定性模型、混合模型和统计模型。上述模型都是对单个测点建立的,由于忽视测点变形间客观存在的相互关系,因此在荷载作用下,各测点因局部因素产生的对正常位移场(如挠曲线)的偏离情况就无法反映出来,不能及时发现问题,消除隐患。所以,寻求建立一种将外荷载作用与坝体位移分布直接联系起来的监控模型是十分必要的。

从物理现象上看,某一荷载作用下,坝体上的每一点都对应着一个确定的位移矢量,即形成坝体位移场。因此,从场论<sup>[1]</sup>的观点出发,把由结构特性和荷载所决定的各点位移间存在的确定性关系作为建立模型的条件,引入空间坐标变量,利用多个测点测值序列建立反映坝体位移空间分布规律的数学模型,即位移分布模型。当固定坐标时,分布模型即演变为测点的数学模型(确定性模型、混合模型或统计模型)。因此,单点模型是分布模型的特例,分布模型是单点模型的推广。建立位移分布模型达到了“一个模型,多点监控”的目的,给大坝的运行管理带来了便利。

## 1 建立分布模型的基本原理和方法

众所周知,大坝在水压(H)和温度(T)等荷载作用下,坝体产生位移场。坝体任

<sup>①</sup>本文得到吴中如、沈长松两位教师的启引

一点位移为:

$$\delta = f(H, T, \theta, x, y, z) \quad (1)$$

式中:  $x, y, z$ —空间直角坐标;  $\theta$ —时间。

当研究一维位移场(如挠曲线)时, 式(1)简化为:

$$\delta = f(H, T, \theta, x) \quad (2)$$

下面通过讨论一维位移分布问题, 介绍建立位移分布问题, 模型的原理和方法。

根据荷载作用的叠加原理, 坝体位移可分为水压分量  $f_1(H, x)$ 、温度分量  $f_2(T, x)$  和时效分量  $f_3(\theta, x)$  三部分, 即:

$$\delta = f_1(H, x) + f_2(T, x) + f_3(\theta, x) \quad (3)$$

下面分别讨论各分量的数学表达式。

### 1.1 各分量的计算公式

#### 1.1.1 水压分量 $f_1(H, x)$

水压作用下, 坝体挠曲线是水位和位置坐标的函数, 用式子表示为:

$$f_1(H, x) = f_1[f(H)f(x)] \quad (4)$$

式中:  $f(H)$ —挠曲线上某一固定点的水压分量。由力学分析<sup>[2]</sup>知:  $f(H) = \sum_{i=0}^n a_i H^i$ , 其中  $a_i$  为参数,  $n$  对重力坝取 3, 对拱坝取 4。

$f(x)$ —某一水位时的挠曲线。根据工程力学原理知:  $f(x)$  是坐标  $x$  的连续函数, 可用多项式逼近, 即:

$$f(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \quad (5)$$

通常情况下, 取  $m=3$ 。

由数学分析知: 连续函数的复合函数是连续的<sup>(3)</sup>。因此  $f_1(H, x)$  是  $H, x$  的连续函数, 可用二元函数的泰勒级数<sup>(3)</sup>展开, 略去高次项, 整理得到:

$$\begin{aligned} f_1(H, x) &= f_1\left(\sum_{i=0}^4 a_i H^i, \sum_{i=0}^3 b_i x^i\right) \\ &= B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i x^i + \sum_{i=1}^4 B_{i+3} H^i + \sum_{i=1}^4 B_{i+7} x H^i + \sum_{i=1}^4 B_{i+11} x^2 H^i + \sum_{i=1}^4 B_{i+15} x^3 H^i \end{aligned} \quad (6)$$

式中:  $B_i (i=0, 1, \dots, 19)$ —待定参数;  $H$ —水深。

#### 1.1.2 温度分量 $f_2(T, x)$

变温场作用下的坝体挠曲线为:

$$f_2(T, x) = f_2[f(T), f(x)] \quad (7)$$

式中:  $f(x)$ —某一固定变温场作用下挠曲线, 可用式(5)表示。

$f(T)$ —挠曲线上某一固定点的温度分量。

视实测温度资料情况,  $f(x)$  有以下表达方式:

对有实测混凝土温度资料的情况

①用混凝土实测温度( $T_i$ )作因子

$$f(T) = \sum_{i=1}^m C_i T_i \quad (8)$$

式中:  $m$  为混凝土温度计总数。

②用混凝土实测温度的等效温度 ( $\bar{T}_i \beta_i$ ) 作因子

$$f(T) = \sum_{i=1}^m (C_i T_i + d_i \beta_i) \quad (9)$$

式中:  $\bar{T}_i$ 、 $\beta_i$  分别为第  $i$  层混凝土的平均温度和温度梯度;  $m$  为混凝土等效温度层数。

对无实测混凝土温度资料, 有气温或水温资料的情况

①用前  $a$  天平均气温或水温作因子

$$f(T) = \sum_{i=1}^m C_i \bar{T}_a \quad (10)$$

式中:  $m$  为天数, 视具体情况而定。

②用周期项作因子

$$f(T) = C_1 \sin \frac{2\pi t}{365} + C_2 \cos \frac{2\pi t}{365} + C_3 \sin \frac{2\pi t}{365} \cos \frac{2\pi t}{365} \quad (11)$$

根据温度资料的实际情况,  $f(T)$  可在式(8)~式(11)中选用。这里以  $f(x)$  选用式(9)为例, 用泰勒级数展开, 略去高次项 (因坝体变形只与温度的一次项有关), 经整理得到:

$$\begin{aligned} f_2(T, x) &= f_2 \left[ \left( \sum_{i=1}^m C_i T_i + \sum_{i=0}^m d_i \beta_i \right) \sum_{i=0}^j b_i x^i \right] \\ &= D_0 \sum_{i=1}^j D_i x^i + \sum_{i=1}^m D_{i+3} T_i + \sum_{i=1}^m D_{i+m+3} \beta_i + \sum_{i=1}^m D_{i+2m+3} x T_i + \sum_{i=1}^m D_{i+3m+3} x \beta_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^m D_{i+4m+3} x^2 T_i + \sum_{i=1}^m D_{i+5m+3} x^2 \beta_i + \sum_{i=1}^m D_{i+6m+3} x^3 T_i + \sum_{i=1}^m D_{i+7m+3} x^3 \beta_i \quad (12) \end{aligned}$$

式中:  $D_i (i = 0, 1, \dots, 8m+3)$ —待定参数; 其余符号意义同前。

### 1.1.3 时效分量 $f_3(\theta, x)$

挠曲线的时效分量表示为:

$$f_3(\theta, x) = f_3[f(\theta), f(x)] \quad (13)$$

式中:  $f(\theta)$ —挠曲线上某一固定点的时效分量。根据文献<sup>[4]</sup>, 一般  $f(\theta)$  用下式表示:

$$f(\theta) = C_1 \theta + C_2 \ln \theta \quad (14)$$

$f(x)$ —一定状态下挠曲线时效分量, 用式(5)表示。

同理, 将  $f_3(\theta, x)$  进行上述处理后得到:

$$\begin{aligned} f_3(\theta, x) &= f_3 \left[ (C_1 \theta + C_2 \ln \theta), \sum_{i=1}^j b_i x^i \right] \\ &= F_0 + \sum_{i=1}^j F_i x^i + \sum_{i=1}^j F_{i+4} x^i \theta + \sum_{i=1}^j F_{i+8} x^i \ln \theta \end{aligned} \quad (15)$$

式中:  $F_i (i = 0, 1, \dots, 11)$ —待定参数;  $\theta$ —累计时间。

## 1.2 挠曲线模型

将式(6)、式(12)和式(15)代入式(3),并考虑初始观测状态( $H_0$ 、 $T_0$ 、 $B_0$ ),整理得到挠曲线统计模型为:

$$\begin{aligned}\delta &= f_1(H, x) + f_2(T, x) + f_3(\theta, x) \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i x^i + \sum_{i=1}^4 B_{i+3} (H^i - H_0^i) + \sum_{i=1}^4 B_{i+7} x^i (H^i - H_0^i) + \sum_{i=1}^4 B_{i+11} x^2 (H^i - H_0^i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^4 B_{i+15} x^3 (H^i - H_0^i) + \sum_{i=1}^m D_{i+3} (\bar{T}_i - \bar{T}_{i0}) + \sum_{i=1}^m D_{i+m+3} (\beta_i - \beta_{i0}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m D_{i+2m+3} x (\bar{T}_i - \bar{T}_{i0}) + \sum_{i=1}^m D_{i+3m+3} x (\beta_i - \beta_{i0}) + \sum_{i=1}^m D_{i+4m+3} x^2 (\bar{T}_i - \bar{T}_{i0}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m D_{i+5m+3} x^2 (\beta_i - \beta_{i0}) + \sum_{i=1}^m D_{i+6m+3} x^3 (\bar{T}_i - \bar{T}_{i0}) + \sum_{i=1}^m D_{i+7m+3} x^3 (\beta_i - \beta_{i0}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m F_{i+4} x^i (\theta - \theta_0) + \sum_{i=1}^m F_{i+8} x^i (\ln \theta - \ln \theta_0)\end{aligned}\quad (16)$$

如果式(16)中的 $f_1(H, x)$ 和 $f_2(T, x)$ 用有限元计算值确定,则得到挠曲线确定性模型表达式:

$$\begin{aligned}\delta &= x[B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i x^i + \sum_{i=1}^4 B_{i+3} (H^i - H_0^i) + \dots \dots \sum_{i=1}^4 B_{i+15} x^3 (H^i - H_0^i) \\ &\quad + A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i x^i + \sum_{i=1}^m D_{i+3} b_i (\bar{T}_i - \bar{T}_{i0}) + \sum_{i=1}^m D_{i+m+3} b_i (\beta_i - \beta_{i0}) + \dots \dots \\ &\quad + \sum_{i=1}^m D_{i+6m+3} b_i (\bar{T}_i - \bar{T}_{i0}) + \sum_{i=1}^m D_{i+7m+3} x^3 b_i (\beta_i - \beta_{i0}) + \sum_{i=0}^3 F_{i+4} x^i (\theta - \theta_0) \\ &\quad + \sum_{i=0}^3 F_{i+8} x^i (\ln \theta - \ln \theta_0)\end{aligned}\quad (17)$$

式中:  $b_i, b_i'$ —分别为各层单位平均温度和温度梯度所产生的测点位移常数。

$x$ —考虑计算参数与实际值差异的调整系数。

当 $f(H, x)$ 用有限元计算值,  $f_2(T, x)$ 、 $f_3(\theta, x)$ 用统计分量时,则得到挠曲线混合模型。

将各测点坐标( $x$ )和对应实测位移 $\delta^\circ(H, T, \theta, x)$ 时的水深( $H$ )、温度( $\bar{T}$ 、 $\beta_i$ )及时间( $\theta$ )代入式(17),由最小二乘法得:

$$Q = \sum [\delta^\circ(H, T, \theta, x) - f(H, T, \theta, x)]^2 \quad (18)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial D_i} = 0 (i = 4, 5, \dots, 8m+3), \frac{\partial Q}{\partial F_i} = 0 (i = 4, 5, \dots, 11) \quad (19)$$

从而求得参数 $x_i$ 、 $D_i$ 、 $F_i$ ,建立挠曲线确定性模型。

## 2 计算实例

## 2.1 工程概况和资料系列<sup>(5)</sup>

某混凝土重力拱坝, 坝顶高程 $\nabla 126.3\text{m}$ , 最大坝高 $76.3\text{m}$ , 上游面 $\nabla 105.0$ 以下设 $1:0.1$ 的倒坡。左岸 $1/4$ 拱处(8<sup>正</sup>坝段)沿坝高设置了三条垂线(见图1), 即8<sup>正上</sup>( $\delta_1$ )、8<sup>正下</sup>( $\delta_2$ )和8<sup>倒2</sup>( $\delta_3$ )。因各测点基准不同, 故在建模前先将它们进行转换。各测点相对于基础的位移为:

坝顶 $\nabla 126.3$ 相对基础:  $\delta_{126.3} = \delta_2 + \delta_3$

$\nabla 105.0$ 高程相对基础:  $\delta_{105.0} = \delta_1 + \delta_3$

$\nabla 68.1$ 高程相对基础:  $\delta_{68.1} = \delta_3$

又由于8<sup>倒2</sup>的始测日(1970.12.19)与8<sup>正上</sup>、8<sup>正下</sup>的始测日(1972.7.18)不对应, 因此将它们转换为相对同一基准日期(1987.4.27)的位移。取1987.5.4~1989.5.18<sup>正上</sup>、8<sup>正下</sup>和8<sup>倒2</sup>三点的实测径向位移, 经上述两次转换后建立8<sup>正</sup>坝段挠曲线模型。

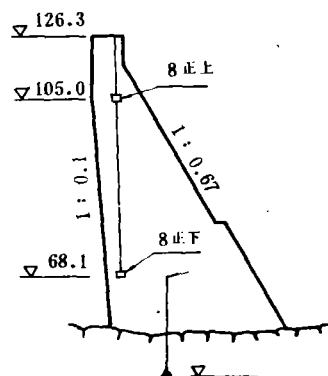


图1 8<sup>正</sup>坝段观测系统布置图

## 2.2 挠曲线确定性模型

### 2.2.1 水压分量 $f_1(H, x)$

用有限元法计算上游水位为 $\nabla 90.75$ ,  $\nabla 95.0$ ,  $\nabla 100.0$ ,  $\nabla 110.0$ ,  $\nabla 119.0$ ,  $\nabla 123.8$ ,  $\nabla 126.1$ 共7组工况下的坝体位移, 用式(6)拟合得到 $f_1(H, x)$ 的表达式, 见表1。

水压分量有限元计算拟合系数

表1

$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$	$B_8$	$B_9$
-1.442	0	0	$-0.820 \times 10^{-4}$	0	$-0.336 \times 10^{-2}$	$0.436 \times 10^{-4}$	$0.801 \times 10^{-6}$	0.010	0
$B_{10}$	$B_{11}$	$B_{12}$	$B_{13}$	$B_{14}$	$B_{15}$	$B_{16}$	$B_{17}$	$B_{18}$	$B_{19}$
0	$0.525 \times 10^{-7}$	$-0.240 \times 10^{-3}$	0	$0.497 \times 10^{-8}$	$-0.119 \times 10^{-8}$	$0.774 \times 10^{-5}$	$-0.167 \times 10^{-6}$	$0.189 \times 10^{-8}$	0

### 2.2.2 温度分量 $f_2(T, x)$

将坝体划分为 $\nabla 70.0$ 、 $\nabla 86.5$ 、 $\nabla 105.0$ 、 $\nabla 112.0$ 、及 $\nabla 126.3$ 共五层, 用有限元法计算各层单位平均温度和温度梯度所产生的坝体位移, 得到相应的载常数(见表2), 将它们代入式(17)中的温度项, 即得 $f_2(T, x)$ 。

单位平均温度(10)和温度梯度(1)的载常数

表2

载常数 测点	$b_{70}$	$b_{86.5}$	$b_{105}$	$b_{112}$	$b_{126.3}$	$b'_{70}$	$b'_{86.5}$	$b'_{105}$	$b'_{112}$	备注
8正上	-0.1029	-1.6619	-3.7154	-16460	-0.2899	0.3237	0.3829	0.3124	0.1403	坝顶与大气接触, 不计 $b_{126.3}$
8正下	0.5723	-19.473	-1.8555	-0.6872	-0.3144	0.2135	0.1443	0.0692	-0.0028	
8倒2	-0.3791	-0.3738	-0.2268	-0.993	-0.0437	0.0437	0.0439	-0.0097	-0.0030	

### 2.2.3 确定性模型

根据上述基本原理, 将经转换后的实测位移( $\delta$ )、上游水深( $H$ )、温度( $T_i$ 、 $\beta_i$ )及时间( $\theta$ )代入式(17), 用多元回归法求得各项参数( $x$ 、 $D_i$ 、 $F_i$ ), 从而建立8<sup>正</sup>坝段的挠曲线确定性模型(见表3)。

8<sup>号</sup>坝段挠曲线确定性模型回归分析成果表

表 3

模型	回 归 系 数					回归精度		样本数	分析时段
	$A_0$	X	.....	$f_{10}$	$F_{11}$	R	S		
确定性模型	-5.6035	1.0305	.....	-0.0956	0	0.990	0.2798	315	87.5—89.5—1

## 2.2.4 成果分析

①精度分析：该模型复相关系数高 ( $R=0.990$ )，标准差较小 ( $s=0.2789\text{mm}$ )，拟合精度较高，可用于监测 8 号坝段的变形性状。

②相关分析：计算得到实测值 ( $\delta$ ) 与时效因子 ( $\theta$ ) 呈负相关，其简单相关系数  $r_{\delta\theta} = -0.10 \sim -0.45$ ，说明分析时段内，8<sup>号</sup>坝段整体向上游变形。这一结论与实测资料所反映的变化趋势相一致。

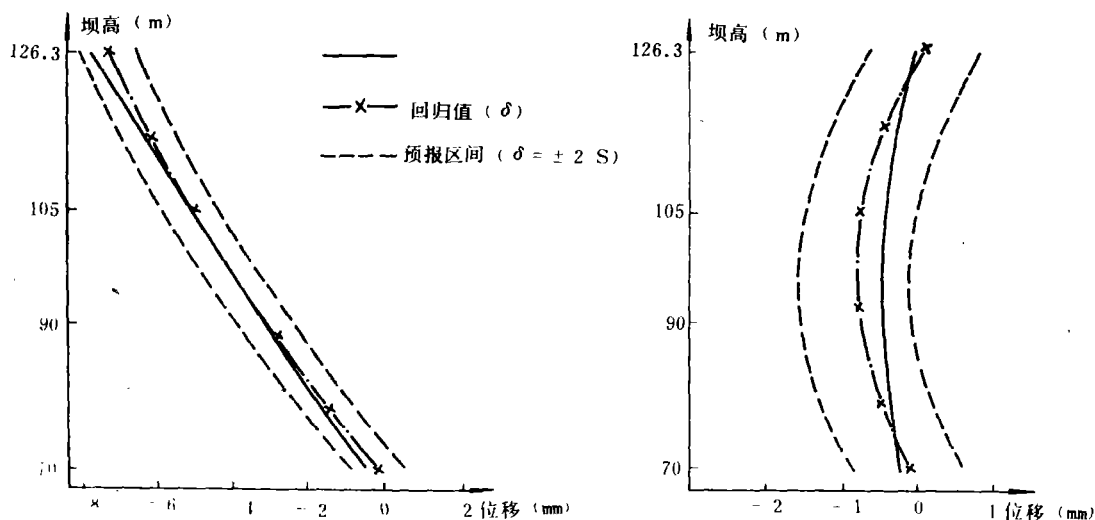
③预报方程：根据精度分析，该模型可用于预报。其预报方程为：

$$\delta = \hat{\delta} \pm 2S \quad (20)$$

式中： $\hat{\delta}$ —模型计算值； $S$ —模型标准差。

分别取 1988.8.1 和 1988.1.4 为温升、温降的典型口，绘出口模型回归值 ( $\hat{\delta}$ ) 和实测值 ( $\delta$ ) 的挠曲线 (见图 2)。

由图可知：温升时 8<sup>号</sup>坝段向上游变形，温降时则相反；回归值与实测值拟合较好，实测挠曲线均落在预报区间内。因此所建模型可以动态描述挠曲线与外部条件间的关系，且监测效果较好。



(a) 1988 年 8 月 1 日

(b) 1988 年 1 月 4 日

(H = 109.09m,  $T_c = 280^\circ\text{C}$ )(H = 111.26,  $T_c = 6.3^\circ\text{C}$ )图 2 8<sup>号</sup>坝段挠曲线确定性模型回归值( $\hat{\delta}$ )与实测值( $\delta$ )拟合图

### 3 结语

本文根据场论, 运用数学分析和坝工理论, 对建立坝体位移分布模型的原理和方法进行了探讨, 并结合某实际工程给出了建立挠曲线确定性模型的具体步骤。经分析得到以下几点认识:

3.1 建立坝体位移分布模型并用于监测大坝变形性态是可行的。分布模型的特点是引入了空间坐标变量, 因此它可以反映坝体位移的空间分布规律。它将位移由单点模型监测发展到由线或面的分布模型监测, 丰富了监测理论和分析方法。

3.2 分布模型是空间坐标  $(x, y, z)$  的连续函数, 它可以反映由于局部因素引起的位移偏离情况, 便于及时发现问题, 采取处理措施。

3.3 在进行有限元计算时, 水压分量与水位荷载之间确定的数学力学关系是对位移分布而言的。因此, 建立分布模型不需增加有限元计算工作量, 而可以更充分和合理地利用其计算成果。

3.4 本文提出的挠曲线模型, 其原理同样可用于建立水平向位移和空间位移场的分布模型。空间坐标可以用直角坐标, 也可以用极坐标。

3.5 分布模型同时利用多个测点的测值序列建模, 在拟合过程中将包含多点的观测误差, 因此精度会略低于单点模型。此外, 如何将分布模型应用于反演分析等也有待于进一步探索和研究。

#### 参 考 文 献

- [1] 谢树艺. 矢量分析与场论. 人民教育出版社。
- [2] 吴中如, 沈长松, 阮焕祥. 水工建筑物安全监控理论及其应用. 河海大学出版社。
- [3] 同济大学数学教研室. 高等数学, 高等教育出版社。
- [4] 吴中如, 陈继禹. 大坝原型观测资料分析方法和模型. 河海大学科技情报. 1989年6月。
- [5] 河海大学, 陈村水电站. 陈村重力拱坝原型结构性态分析总报告。

### A Study of Mathematical Model of Displacement of More observation Points For safety Monitoring of concrete Dams

Lu Shaojun

(Hohai University)

**Abstract:** The prototype observation of dam deformation is one of the main content. It is the important evidence for analysis of prototype structure behaviour of dam. Now, the mathematical model of dam displacement is built up for single point and the relationship among the deformations of observation points is omitted. In this paper, the space distribution model is studied from the mathematics analysis and the theory of dam. It is proposed to combine the deformation of each point with coordinate variable and the mathematical expression between the distribution displacement and the load is obtained. In the light of the prototype observation data of a actual engineering, the method of building up the distribution model is introduced and the deterministic model of deflection curve is founded. The obtained result is satisfactory.

**Keywords:** Prototype observation, Dam deformation, Distribution model.