

饱和——非饱和三维瞬态渗流 的高斯点有限元分析^①

汪自力 高骥 李信 李莉

(黄河水利委员会水利科学研究院)

摘 要: 本文提出了堤坝三维饱和——非饱和瞬态渗流有限元分析的一种新方法——高斯点法。本法是根据饱和——非饱和渗流规律建立的数学模型,将堤坝内饱和——非饱和区耦合在一起,构成整体的分析模型,然后利用数值积分时高斯点处压力选取计算参数来进行单元刚度矩阵的计算,从而解决了单元内存在的非饱和渗透参数不同的问题,也解决了由于饱和区边界条件突变引起的计算不稳定问题。该法计算量小,迭代格式简单,算例表明了该法的有效性。

关键词: 三维,瞬态渗流,饱和——非饱和,高斯点,有限元

中国图书分类号: 223

对于洪峰来去迅猛的河流,所产生的渗流动态情势可能造成工程失事,而且许多问题也不能当作二维问题处理,因此,进行堤坝工程中不稳定三维渗流课题的研究,既重要而又十分必要。以往渗流分析的研究大多只针对着自由面以下的饱和区进行^{[1][2]}。近年来,考虑自由面以上的非饱和渗流研究正在开展^{[3][4]},即饱和——非饱和渗流的分析,以求更真实地反映堤坝的渗流动态,从而有效地解决水位骤升、骤降及降雨等引起的不稳定渗流问题。

以往对非饱和渗流的分析,单元内的计算参数都取为单元结点处参数的平均值,即对一个单元计算参数是常量^{[3][4]},且多是对二维问题。这样,当单元较大时,造成的误差较大。而且,当饱和区边界条件有突变时(如水位骤降),水头函数是时间的间断函数,计算时易引起振荡,甚至不收敛。本文提出的高斯点法,是在计算单元刚度矩阵时采用高斯数值积分法,每个高斯点处的计算参数都随该点压力不同而变化,即计算参数在一个单元内是变量而且数值计算稳定。这样对自由面不断变动的瞬态三维渗流的分析很方便。用模型试验资料比较验证了该法的可靠性、有效性和实用性。

1 饱和——非饱和渗流的基本方程及求解

1.1 饱和——非饱和瞬态渗流的基本方程^{[3][4]}:如(图1)示,不可压缩流体通过多孔介质(无内源)的瞬态渗流控制方程为:

^① 本成果是水电部水利水电科学基金资助项目。

$$\operatorname{div}[k \operatorname{grad} H] = g \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (\text{在 } \Omega \text{ 域}) \quad (1)$$

其中, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, k 为非饱和、非饱和和渗透系数张量。

$$H = z + h, \quad (2)$$

在饱和区 H 为饱和流总水头, h 为渗透压为水头; 在非饱和区, H 为非饱和流总水头, h 为毛细管压力水头 (负值); z 为相应点的垂直坐标。

$$g = S_s S_w + d\theta / dh, \quad (3)$$

S_s 为土体单位贮水率, S_w 为土体饱和度, θ 为土体体积含水量。

注意到, 在饱和区内, $g = S_s$

1.2 定解条件:

如 (图 1) 示

$$\text{初始条件: } H(x, y, z, d) = H_0(x, y, z) \quad (4)$$

$$\text{边界条件: } H(x, y, z, t) = H_b(x, y, z, t), \text{ 在 } \Gamma_1 \text{ 上,} \quad (5)$$

$$H(x, y, z, t) = z, \text{ 在 } \Gamma_2 \text{ 上,} \quad (6)$$

$$k_x \frac{\partial H}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial H}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial H}{\partial z} n_z = 0, \text{ 在 } \Gamma_3 \text{ 上,} \quad (7)$$

$$k_x \frac{\partial H}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial H}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial H}{\partial z} n_z = I - E, \text{ 在 } \Gamma_4 \text{ 上,} \quad (8)$$

式中, k_x 、 k_y 、 k_z 分别为 x 、 y 、 z 向的渗透系数, n_x 、 n_y 、 n_z 分别为 x 、 y 、 z 向的外法线余弦, E 、 I 分别为单位时间内在单位面积土体上的蒸发水量和降雨量。

$$\text{第一类边界 } \Gamma_w (\Gamma_w = \Gamma_1 + \Gamma_2) \text{ 上, } H = \bar{H}, \quad (9)$$

$$\text{第二类边界 } \Gamma_g (\Gamma_g = \Gamma_3 + \Gamma_4) \text{ 上, } (k \nabla H)^T \bar{n} = -\bar{q}_n, \quad (10)$$

注意到, 这里自由面已不再作为边界。

1.3 高斯点法的基本思想^[2]:

方程 (1) 的求解域是整个域 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, 方程 (1) 中的系数也相应定义为:

$$K(h) = \begin{cases} k_s, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 域内 } (h \geq 0), \\ k_r k_s, & \text{在 } \Omega_2 \text{ 域内 } (h < 0), \end{cases} \quad (11)$$

$$S_w(h) = \begin{cases} 1, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 域内,} \\ \beta, & \text{在 } \Omega_2 \text{ 域内} \end{cases} \quad (12)$$

$$d\theta / dh = \begin{cases} 0, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 域内,} \\ C(h), & \text{在 } \Omega_2 \text{ 域内} \end{cases} \quad (13)$$

这里, k_s 为饱和渗透系数, k_r 为相对非饱和渗透函数 ($0 < k_r < 1$), 而 $0 < \beta < 1$, $C(h)$ 是随压力而变的土体比水容量。

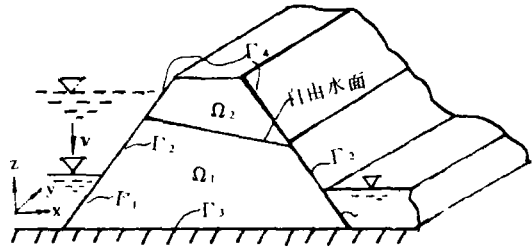


图 1 堤坝边界示意图

在计算单元刚度矩阵时, 本文用高斯数值积分法, 并借助高斯点处压力 h 值, 由式 (11) ~ (13) 根据试验曲线分别选取 k_r 、 β 、 $C(h)$ 值, 这样非饱和带各点计算参数不同的特点就通过各高斯点处计算参数的分别选取表现出来了, 即单元内非饱和和渗透参数的差异表现为各高斯点处计算参数不同。特别是含有自由面的单元, $h < 0$ 的高斯点处取非饱和和渗透系数, $h > 0$ 的高斯点处取饱和和渗透系数计算, 这对计算稳定很有利。这就是高斯点法的基本思想。

1.4 时域有限元法:

对方程 (1) 的求解, 采用时域有限元法中的半离散逐步积分法。

先做空间离散, 采用空间八结点等参元, 设单元函数为:

$$H = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) H_i(t) = [N][H] \quad (14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) \frac{dH_i(t)}{dt} = [N][\dot{H}] \quad (15)$$

其中, ξ, η, ζ 为等参坐标; $dH_i(t)/dt$ 为 t 时刻结点 i 的总水头对时间的变化率值,

$$[N] = [N_1, N_2, \dots, N_8],$$

N_i 为插值函数的形函数, 且

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i), \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (16)$$

在第一类边界条件 Γ_σ 满足的情况下, 方程 (1) 相应的有限元加权余值方程为:

$$\int_{\Omega} [\nabla^T (k \nabla H) - g \frac{\partial H}{\partial t}] W_j^* d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} [(k \nabla H)^T \bar{n} + \bar{g}_n] W_j^* d\Gamma = 0 \quad (17)$$

W_j^* 为加权函数

在方程 (17) 中引入式 (14)、(15), 按有限元剖分, 有 $\Omega = \sum \Omega_e$ 按伽勒金有限元法, 加权函数 W_j 取为单元函数 N_j , 又设 $k_x = k_y = k_z = k$, 入渗率 I 和蒸发率 E 相等 ($\bar{g}_n \equiv 0$), 则有:

$$\sum_e \int_{\Omega_e} \{ [N]^T g [N][\dot{H}] + [B]^T k [B][H] \} d\Omega_e = 0 \quad (18)$$

$$\text{可写为: } [C][\dot{H}] + [K][H] = 0 \quad (19)$$

其中, $[C] = \sum_e [C]^{(e)}$, $[K] = \sum_e [K]^{(e)}$, 按单元求得:

$$[C]^{(e)} = \int_{\Omega_e} [N]^T_g [N] d\Omega_e = \iiint_{-1}^1 [N]_g [N][J] d\xi d\eta df, \quad (20)$$

$$[K]^{(e)} = \int_{\Omega_e} [B]^T_g [B] d\Omega_e = \iiint_{-1}^1 [B]_g [B][J] d\xi d\eta df, \quad (21)$$

式中,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X} & \frac{\partial N_2}{\partial X} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial X} \\ \frac{\partial N_1}{\partial Y} & \frac{\partial N_2}{\partial Y} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial Z} & \frac{\partial N_2}{\partial Z} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

[J]为雅可比矩阵

单元的几何等参变换为:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i((\xi, \eta, \zeta)) x_i = [N][X]$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i((\xi, \eta, \zeta)) y_i = [N][Y]$$

$$z = \sum_{i=1}^8 N_i((\xi, \eta, \zeta)) z_i = [N][Z]$$

下面进行时间域的离散, 采用向后差分格式, 即方程(19)在 $t + \Delta t$ 时刻成立。假定:

$$[H] = [H]_{t+\Delta t}$$

$$[\dot{H}] = \frac{[H]_{t+\Delta t} - [H]_t}{\Delta t}$$

$$\text{则有: } \{[C]_{t+\Delta t}^{(i-1)} / \Delta t + [K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\} [H]_{t+\Delta t}^{(i)} = [C]_{t+\Delta t}^{(i-1)} / \Delta t [H]_t \quad (22)$$

方程(22)表示在每个时间内都需要迭代求解, 其中上标 i 表示第 i 次的迭代结果, 下标 $t+\Delta t$ 表示 $t+\Delta t$ 时刻的结果。该方程就是本文在 $t+\Delta t$ 时间步的迭代格式。

稳态渗流时相应的格式为:

$$[K]^{(i-1)} [H]^{(i)} = 0 \quad (23)$$

计算起步时, 可假设整个域都是饱和的, 然后根据求得的 $[H]$ 值不断调整计算参数, 得到相应时刻的结果。

1.5 若干说明:

1.5.1 自由面位置: 迭代收敛后, $H=Z$ 的点所连成的零压力线即为所求时刻的自由面, 这可由结点数按线性内插求得。

1.5.2 收敛标准: 按结点水头值的平均变化范围确定, 即收敛时应有:

$$\frac{1}{ND} \sum_{i=1}^{ND} |H_j^{(i)} - H_j^{(i-1)}| \leq \varepsilon \quad (24)$$

其中, ND 为结点总数, i 为迭代序数, ε 为给定的精度。

1.5.3 渗出点及边界条件的处理: 由于在可能渗出段 Γ_2 上, 处处满足 $H=Z$ 的条件, 故渗出点是个奇点。本文对下游边界结点 j , 采用其相邻的内部结点($j-1$)的压力值 $h(j-1)$ 值来判断渗出点的大致位置, 只要 $h(j-1) < 0$, 即认为 j 结点在渗出段以上, 即 $h_j > 0$, 相应的 j 结点就不作为强加边界条件处理。对上游边界结点也做类似处理。

1.5.4 高斯点数目的选择及网格的剖分: 由于本文的计算参数是随高斯点变化的, 故本文采用较密的高斯点, 即 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 个来进行数值积分, 而网格相应稀些, 这样既

可节省计算量, 又不失精度。

1.5.5 时间步长的选择: 对瞬态渗流这类时域内非线性问题, Δt 既有上限也有下限^[6], 另外, 由于研究对象是非线性问题, 又是时域和三维流问题, 故采用精度计算是很必要的。

1.5.6 计算参数的处理: 对瞬态渗流问题, 计算参数应取连续函数, 否则, 容易引起振荡。

2 算例及结果分析

矩形均质土坝模型: 长 315cm, 宽 23cm, 高 33cm。模型材料为均匀砂, 孔隙率 $n=0.44$, 贮水率 $S_s=0$, 饱和渗透系数 $k_s=0.33\text{cm/s}$, $k \sim 0 \sim k_r$ 曲线 (图 2)、 $c(h) \sim h$ 曲线 (图 3) 由试验曲线整理而得。计算域内按矩形网格均匀剖分, 由于问题的对称性, 可只计算两个断面, 计算结点总数 $ND=14 \times 5 \times 2=140$ 个, 计算单元总数 $NE=13 \times 4 \times$

$1=52$ 个, 单元尺寸为 $\Delta x=24.23\text{cm}$, $\Delta y=4.60\text{cm}$, $\Delta z=8.25\text{cm}$ 。

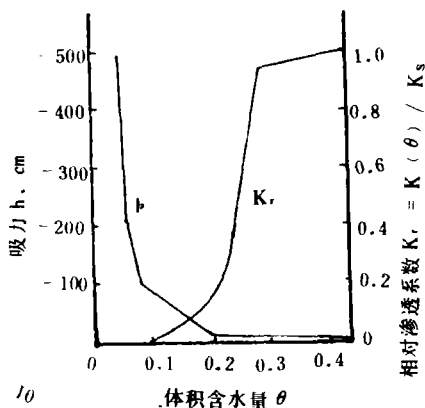


图 2 非饱和土的参数曲线

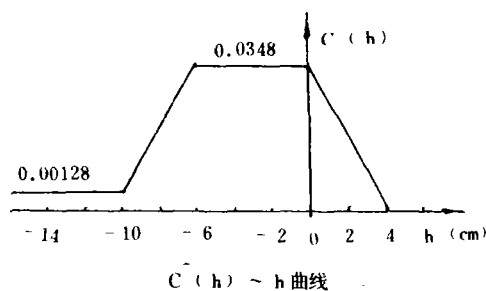


图 3 $C(h)-h$ 曲线

2.1 骤升情况:

初始条件采用上、下游水位均为 10cm 的平衡态, 然后上游水位骤升至 30cm, Δt 起步时取 15s, 计算结果与赤井浩一的试验结果^[5] 做了比较 (见图 4)。

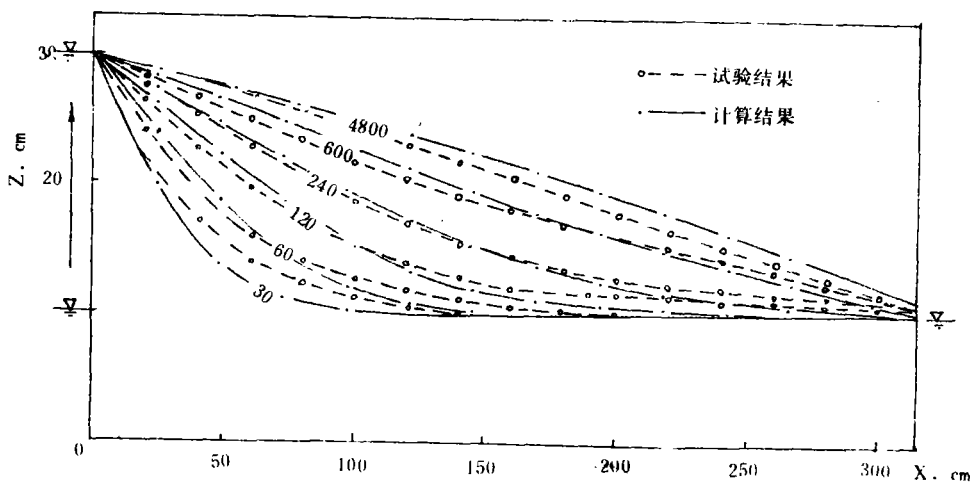


图 4 均质坝长方体模型水位骤升时自由水面数值解与砂模试验比较 (第一断面, $Y=0$)

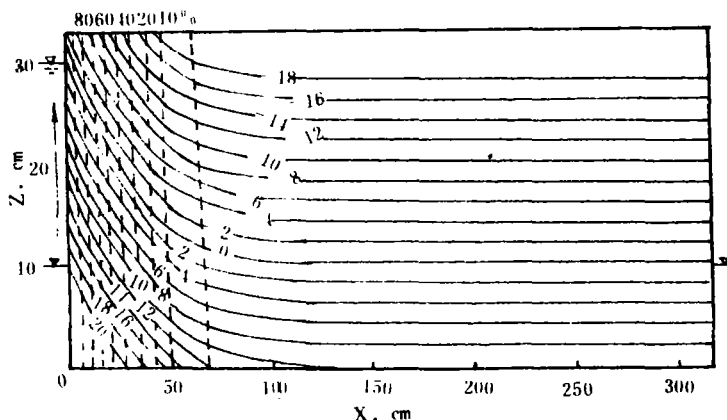


图5 均质长方模型水位骤升后 $t = 30s$ 的等压线及等水头线分布
(第一断面, $y = 0$)

2.2 骤降情况:

初始水位采用上、下游均为 30cm 的平衡态, 然后下游水位骤降至 10cm, Δt 起步时取 15s, 计算结果与相应的试验结果^[5] 做了比较 (见图 6)。

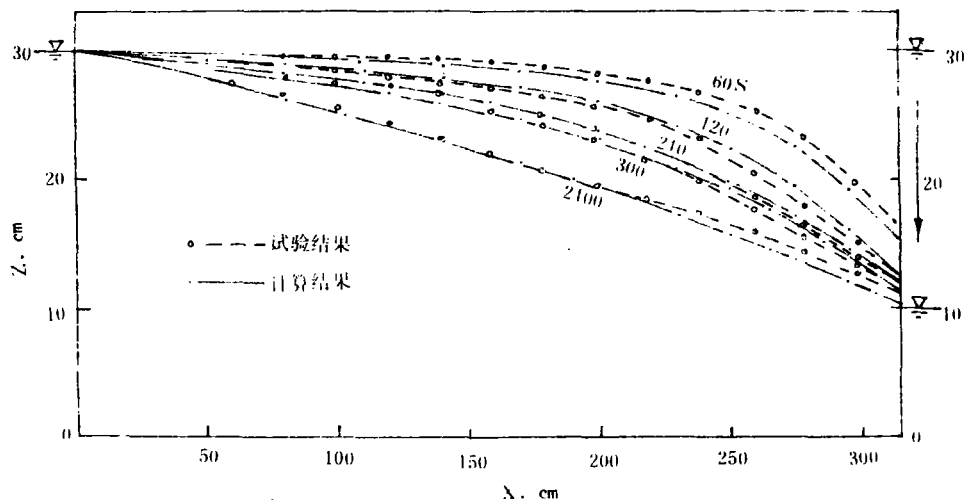


图6 均质坝长方体模型水位骤降时自由水面数值解与砂模型试验比较
(第二断面, $y = 4.60$)

2.3 结果分析:

由 (图 4) ~ (图 6) 可以看出, 水位骤升时等压线呈凹形曲线, 水位骤降时呈凸形曲线。两种情况下的计算结果与试验结果基本上一致, 等压线的变化都反映出正常的规律性。

当水位骤升时, 上游侧等水头线密集, 等压线弯曲 (图 5), 说明这一带水流变化急剧, 而随着时间的延长, 等水头线分布较均匀, 等压线呈近于平行的直线族 (图略), 即水流已近于平稳的状态。

当水位骤降时, 下游侧等水头线密集, 等压线弯曲 (图略), 说明该处水流在急剧变

化, 同样, 随着时间的延长, 排水量也减少, 并渐趋于稳定状态 (图略)。

3 结语

本文通过以上对瞬态三维饱和——非饱和渗流问题的分析研究, 得到以下结论:

- 3.1 本文提出用高斯点有限元法求解饱和——非饱和三维瞬态渗流问题, 对单元均按高斯点处的压力值分别选取计算参数来计算单元对总刚度阵的贡献, 从而很容易且较好地解决了单元内部实际存在的由渗透参数不同引起的不均质问题, 并解决了由于饱和区边界条件突变引起的计算不稳定问题, 为瞬态渗流问题的求解提供了一个简单实用的方法。
- 3.2 本文将饱和区与非饱和区耦合在一起分析, 使得复杂的自由边界问题不再存在, 并能对水位升降、降雨或蒸发等引起的三维不稳定渗流问题进行分析。
- 3.3 本文的方法极易推广到各种具有与未知函数相关的变系数及边界不定问题的求解。如溢流问题等。

参 考 文 献

- [1] C.S.Desai, G.C.Li. A Residual Flow Procedure and Application for Free Surface Flow in Porous Media. Advances in Water Resources, 1983, Vol.6
- [2] 汪自力. 瞬态有自由面渗流问题的有限元分析. 大连理工大学硕士论文, 1989。
- [3] 驹田广也等. 筑坝在库水位急降时不稳定渗流分析与稳定分析. 水利水运科技情报, 1978 年增刊第 3 期。
- [4] 高骥, 雷光耀, 张锁春. 堤坝饱和——非饱和渗流的数值分析. 岩土工程学报, Vol, 18, No, 6, 1988.
- [5] 赤井浩一, 大西有三, 西垣诚. 有限要素法による饱和——非饱和的浸透流の解析. 土木学术论文报告集, No. 264, 1977 年。
- [6] 欧阳华江. 混凝土长期变形基本理论及应用. 大连理工大学博士论文 1989

Gauss Point Finite Element Method to Analysis Transient Seepage through the Saturated and Unsaturated Soils

Wang Zi li Gao Ji Li Xin Li Li

(Institute of Hydraulic Research YRCC, Zhengzhou)

Abstract: A simplified and practical "Gauss Point" finite element method to analysis 3-D transient seepage through the saturated / unsaturated soils of levees or dams is proposed. In the method the flow domain is extended into the unsaturated domain. When calculating any element stiff matrix, the calculative coefficients should be choiced according to the pressure value of each Gauss Point. Two examples indicate its effidcnacy.

Keywords: 3-D, Transient Seepage, Saturated / unsaturated, Gauss Point, Finite Element.