

双肢剪力墙及框剪结构弹塑性 分析的样条函数方法

刘建秀

(郑州轻工学院)

摘 要: 本文应用样条子域法及 QR 方法对双肢剪力墙及框剪结构进行弹塑性分析,建立了它们的计算模式。计算结果表明,利用这种方法对双肢剪力墙及框剪结构进行弹塑性分析,不仅计算简便,而且精度也高,容易在微机上实现。

关键词: 样条函数方法, 弹塑性

中国图书分类号: TU311

建筑结构在冲击荷载或地震荷载作用下,其受力状态和变形性能往往处于严重的材料非线性和几何非线性状态。这样便决定了对建筑结构进行弹塑性分析的必要性。电子计算机在工程中的广泛应用,提供了进行大型结构弹塑性分析的可能性。

国内外对结构的弹塑性问题作过许多研究,提出一些数值方法。目前虽然可用有限元法求解结构的弹塑性问题,但工作量很大,费用昂贵,不能在小机上实现。我们在上述方法的基础上,提出了样条子域法,即从最小势能原理出发,先把结构分成几个子域,其次用 QR 方法作子域分析,然后对结构作整体分析。在用 QR 方法作子域分析时,把结构的位移函数表示为 B 样条函数和正交函数乘积的线性组合,利用最小势能原理建立总刚度方程。本文方法的优点在于不用连续化假设,所编程序简单,内存少,输入数据少,精度高。为结构的弹塑性分析提供了一条新的途径。

1 弹塑性问题概述

建筑结构的应力应变关系几乎都是非线性的,而任何结构的非线性应力应变关系,都可以用弹性应力应变关系再迭加适当的初应力来实现;即:

$$\{\sigma\} = [D]_{ep} \{\varepsilon\} = [D] \{\varepsilon\} + \{\sigma^0\} \quad (1)$$

$$\{\sigma^0\} = ([D]_{ep} - [D]) \{\varepsilon\} = [D]_p \{\varepsilon\} \quad (2)$$

这样,非线性应力应变单元就可以看成具有初应力的弹性单元。对于这种弹性单元在列单元的平衡方程时又可以把初应力 $\{\sigma^0\}$ 化成在单元节点处的等效外载 $\{F\}_e^0$,下面导出 $\{F\}_e^0$ 的公式。

设以 $\{U\}_e^*$ 表示单元节点的任一虚位移列阵;以 $\{F\}_e^*$ 表示单元节点处的广义力列阵;

以 $\{\sigma\}^e$ 表示单元应力列阵,以

$$\{\varepsilon^*\}^e = [B]\{\mathbf{U}^*\}^e \quad (3)$$

表示单元 l,k 的虚应变列阵。则根据虚位移原理有:

$$\{\mathbf{U}^*\}^{eT} \{\mathbf{F}\}^e = \int_{ve} \{\varepsilon^*\}^{eT} \{\sigma\}^e dv \quad (4)$$

将(3)式代入(4)式得:

$$\{\mathbf{F}\}^e = \int_{ve} [B]^T \{\sigma\}^e dv \quad (5)$$

将(1)式代入(5)式得:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}\}^e &= \int_{ve} [B]^T ([D]\{\varepsilon\}^e + \{\sigma^0\}^e) dv \\ &= \int_{ve} [B]^T [D][B] dv \{\mathbf{U}\}^e + \int_{ve} [B]^T \{\sigma^0\}^e dv \end{aligned} \quad (6)$$

单元的弹性刚度矩阵为:

$$\int_{ve} [B]^T [D][B] dv = [K]^e = [K_0]^e \quad (7)$$

$$\text{若记: } [F]_a^e = - \int_{ve} [B]^T \{\sigma^0\}^e dv \quad (8)$$

$$\text{则(6)式可写为下式: } [K_0]^e \{\mathbf{U}\}^e = \{\mathbf{F}\}^e + \{\mathbf{F}\}_a^e \quad (9)$$

这就表示单元中初应力的存在, 等价于在节点处作用(8)式所表示的附加节点外载 $\{\mathbf{F}\}_a^e$ 。

将(9)式按单元迭加起来, 左端就是 $[K_0] \{\mathbf{U}\}$, $[k_0]$ —弹性总刚度矩阵; 右端迭加后分别形成 $\{\mathbf{F}\}$ 与 $\{\mathbf{F}\}_a$ 故有:

$$[K_0] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}\}_a \quad (10)$$

在上式中, 若令 $\{\mathbf{F}\}_a = 0$, 则变为弹性方程, 也就是说, 方程的非线性项都包含在 $\{\mathbf{F}\}_a$ 中。

2 带孔剪力墙弹塑性分析的 QR 方法

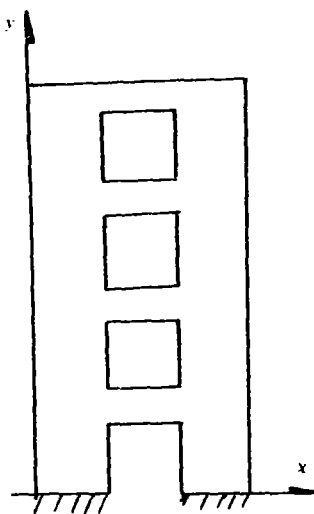
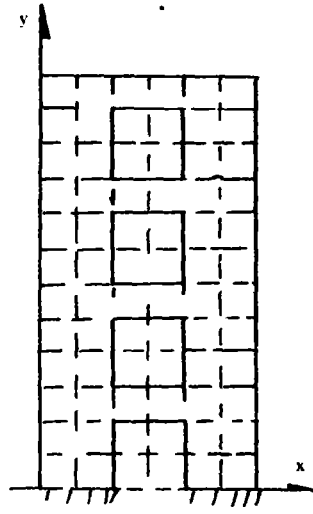


图 1



(a)

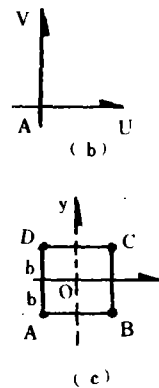


图 2

图1所示为一带孔剪力墙子域, 把它划分为图2a所示的若干矩形单元, 设其位移函数为:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{u\}_m X_m(y) \\ v &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{v\}_m Y_m(y) \end{aligned} \quad (11)$$

对每个矩形单元 $ABCD$ (如图2c) 有:

$$\{U\}^e = [N]_e \{\delta\} \quad (12)$$

式中: $\{U\}_e = [\{U\}_A^T \{U\}_B^T \{U\}_C^T \{U\}_D^T]^T = [u_i v_i u_j v_j u_k v_k u_l v_l]^T$ (13)

$$[M]_e = [[N]_A^T [N]_B^T [N]_C^T [N]_D^T]^T = [IN_i \quad IN_j \quad IN_k \quad IN_l]^T \quad (14)$$

式中: I 为二阶单位阵

弹塑性问题的本构关系为:

$$\{\sigma\}^e = [D]\{\varepsilon\}^e + \{\sigma_0\}^e \quad (14)$$

假设以 $\{\sigma^*\}^e$ 表示单元节点的广义虚位移列阵, 以 $\{F\}^e$ 表示单元节点处的广义力列阵,

以 $\{\sigma^0\}^e$ 表示单元初应力列阵, 以

$$\{U^*\}^e = [N]\{\sigma^*\}^e \quad (15)$$

表示单元的虚位移列阵; 据虚位移原理, 并应用(14)式得:

$$\{U^*\}^{eT} \{F\}^e = \{U^*\}^{eT} [K]^e \{U\}^e + \{U^*\}^{eT} \int_{ve} [B]^T \{\sigma^0\}^e dv \quad (16)$$

式中: $[K]^e$ 为单元的弹性刚度阵,

$\{F\}^e = [F_A \quad F_B \quad F_C \quad F_D]^T = [P_{xi} \quad P_{gi} \quad P_{xj} \quad P_{yj} \quad P_{xk} \quad P_{yk} \quad P_{xl} \quad P_{yl}]^T$ 为单元的节点荷载。

$\{\sigma^0\}^e$ 为单元的初应力矩阵; $[B]$ 为形变矩阵, 将(11)式, (15) 式代入 (16) 式得:

$$[N]^{eT} \{F\}^e = [N]^{eT} [K]^e [N]^e \{\delta\} + [N]^{eT} \int_{ve} [B]^T \{\sigma^0\}^e dv \quad (17)$$

$$\text{令: } [G]^e = [N]^{eT} [K]^e [N]^e \quad (18)$$

为单元的广义刚度矩阵, 对有孔处的单元令 $E=0$, $G=0$, $\mu=0$ 。

$$\{f\}^e = [N]^{eT} \{F\}^e \quad (19)$$

为单元广义节点力列阵

$$Az\{F\}_\sigma^e = - \int_{ve} [B]^{eT} \{\sigma^0\}^e dv \quad (20)$$

$$\{f\}_\sigma^e = [N]^{eT} \{F\}_\sigma^e \quad (21)$$

为单元的附加荷载列阵, 则 (17) 式变为:

$$[G]^e \{\delta\}^e = \{f\}^e + \{f\}_\sigma^e \quad (22)$$

设整个带孔剪力墙有 M 个单元, 则整个带孔剪力墙的刚度方程为:

$$\int [G] \{\delta\} = \{f\} + \{f\}_\sigma \quad (23)$$

式中:

$$[G] = \sum_{r=1}^M [G]^r \text{——剪力墙的广义刚度矩阵}$$

$$[f] = \sum_{r=1}^M \{f\}^r \text{——剪力墙广义荷载列阵}$$

$$[f]_x = \sum_{r=1}^M \{f\}_x^r \text{——剪力墙附加广义节点荷载}$$

由上述可知, 虽然剪力墙被划分为网络, 但整个剪力墙的未知量的个数与结点数无关, 只与竖向网络线数 (B 样条结点数) 及多项式项数有关, 未知量的个数为 $2(N+1)r$ 个, 对图 1 剪力墙, 如果水平方向取 8 个点, 竖向方向取 40 个点, 多项式取 5 项, 则本法的未知量只有 80 个, 而用有限元法, 未知量为 640 个; 且竖方法取点越多, 本方法的优越性就越明显。见后面例题。

3 连系梁子域弹塑性分析的样条函数方法

对连系梁, 根据梁高的不同, 可分为下列三种情况来考虑

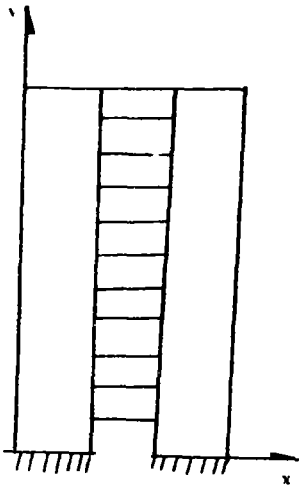


图 3

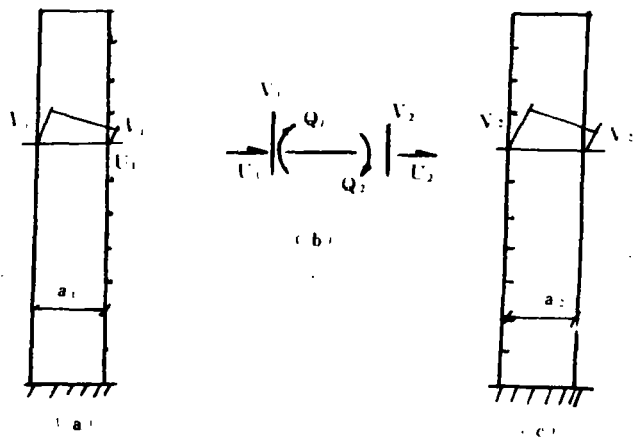


图 4

3.1 图 3 为一连系梁结构, 如果连系梁的高度较小, 则可将连系梁分为两个剪力墙子域, 一个杆件子域, 对于杆件子域, 位移函数设为:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{u\}_m X_m(y) \\ v &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{v\}_m Y_m(y) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

杆端转角为:

$$\theta_1 = \frac{\bar{v}_1 - v_1}{a_1} \quad \theta_2 = \frac{v_2 - \bar{v}_2}{a_2} \quad (25)$$

两剪力墙子域仍划分为矩形单元, 总刚的迭加利用公共边的位移协调条件。

$$[G] = \begin{bmatrix} \text{左肢墙的刚度阵} & & \\ & \text{连杆的刚度阵} & \\ & & \text{右肢墙的刚度阵} \end{bmatrix} \quad (26)$$

3.2 如果连系梁的梁高较大 ($\frac{c}{C} > 0.3$), 则可将连系梁沿竖向等效为连续体, 作为剪力

墙子域分析, 等效连续体常数为: $E_x = \frac{c}{C} E$ $E_y = 0$, $\mu_x = 0$, $\mu_y = 0$.

$$G_{xy} = \frac{E}{\frac{\bar{c}}{c} \left[\left(\frac{b}{c} \right)^2 + 2\zeta (H\mu) \right]}$$

式中: $b = a + \frac{c}{2}$, E —弹模, μ —泊松比, ζ —剪应力不均匀分布系数 (与截面形状有关); 对矩形截面, $\zeta = 1.2$, \bar{C} 为楼层高度; C —连系梁横截面高度, a —连系梁长度。

$$\text{位移函数设为: } \left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{a\}_m X_m(y) \\ v &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{b\}_m Y_m(y) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中: $\{a\}_m = [u_0 \ u_0' \ a_1 \ \cdots \ a_{N-1} \ u_N \ u_N']_m^T$

$$\{b\}_m = [v_0 \ v_0' \ b_1 \ \cdots \ b_{N-1} \ v_N \ v_N']_m^T$$

$$[\varphi] = [\varphi_{-1} \ \varphi_0 \ \cdots \ \varphi_{N+1}] = [\varphi_{3i}] [Q]$$

$$\varphi_{3i} = \varphi_3 \left(\frac{x}{h} - i \right) \text{ 可取三次, 五次 B 样条}$$

$$[Q] = \text{diag} ([Q1] \ [I] \ [Q2])$$

$$[Q1] = \begin{bmatrix} 0 & -2h & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{h}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [Q2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{h}{2} \\ 1 & 0 & 2h \end{bmatrix}$$

$X_m(y)$ 、 $Y_m(y)$ 为正交多项式

3.3 也可把连系梁梁高较大时, 作为带孔剪力墙, 设位移函数为:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{u\}_m X_m(y) \\ v &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{v\}_m Y_m(y) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

多肢剪力墙的讨论与此类似, 只是多分几个子域。

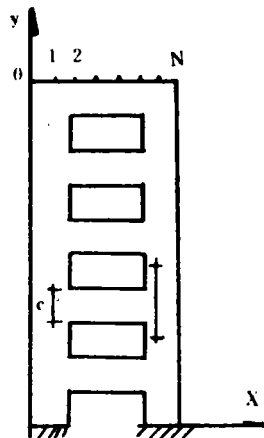


图 5

4 框剪结构弹塑性问题的 QR 方法

在高层建筑中,常采用框架—剪力墙结构,因为它在承受水平力方面具有较好的性能。如图(6)

框剪结构的离散化分析有两种方法:

4.1 把框架离散为一维杆单元,把剪力墙离散为四边形单元,然后组合在一起进行分析,对剪力墙子域,位移函数设为:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{u\}_m X_m(y) \\ v &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{v\}_m Y_m(y) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

框架的位移函数设为:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{u\}_m X_m(y) \\ v &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{v\}_m Y_m(y) \\ Q &= \sum_{m=1}^r [\varphi(x)] \{\theta\}_m Z_m(y) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

在公共边,框架的梁单元左端转角设为:

$$\theta_1 = \frac{\bar{v}_1 - v_1}{a_1} \quad (31)$$

4.2 把整个结构(包括剪力墙在内),都离散为杆单元,如图7,其中剪力墙的柱单元的截面高度与杆长的比值较大,剪切变形影响不计,而剪力墙梁单元为带刚域的单元。

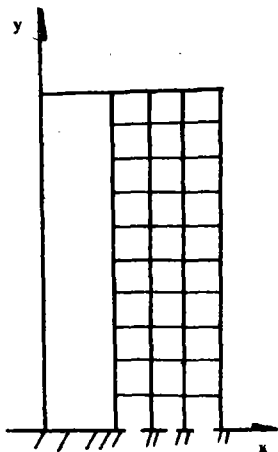


图 6

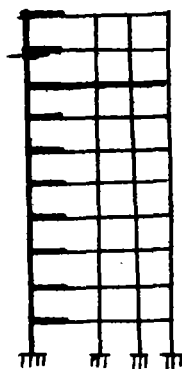


图 7

5.8 判断是否屈服: 用 Mises 屈服条件, 求其等效应力:

$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$, 如果 $\bar{\sigma} < \sigma_s$ (对每个单元), 则加一级荷载重复

$2^\circ \sim 7^\circ$, 再判断是否屈服, 若 $\bar{\sigma} > \sigma_s$, 则改变附加荷载项 $\{f\}_o$, 使 $\{f\}_{o,n}^j = \{f\}_{o,n}^{j-1} + \Delta\{f\}_{o,n}^j$ 重复 5.1~5.7, 直到没有新的屈服单元出现, 然后再加一级荷载重复 5.2~5.7 直到全部荷载加完。

例题: 图 8 所示为一连系梁, 已知数据如下: 梁截面 1~3 层 $0.5 \sim 0.63\text{m}^2$, 4~10 层 $0.5 \times 0.5\text{m}^2$, $E = 3.15 \times 10^6 \text{t/m}^2$, $\mu = 0.17$, 受倒三角荷载, 最大值 100t , 屈服应力为 3500t/m^2 , 计算结果, 如表 1、图 9、10。

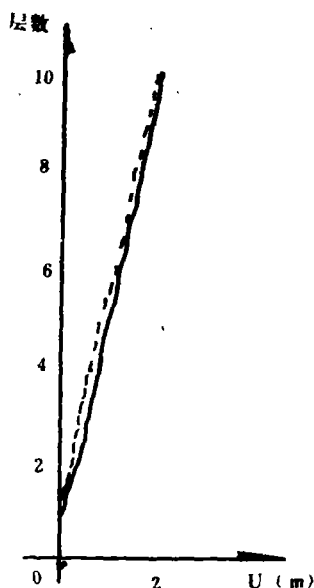


图 9

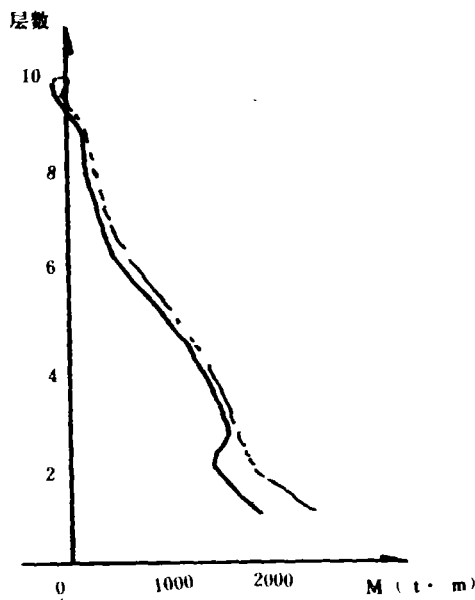


图 10

连续梁的弹塑性解

表 1

层数 \ 位移 弯矩	$u_e \mid_{x=0}^{(m)}$	$u_{ep} \mid_{x=0}^{(m)}$	$M_e \mid_{x=0 \text{ 右端弯矩}}^{(t \cdot m)}$	$M_{ep} \mid_{x=0 \text{ 右端弯矩}}^{(t \cdot m)}$
1	0.06040	0.08455	-2499.080	-1925.264
2	0.19320	0.21736	-1818.876	-1755.101
3	0.36162	0.38577	-1692.922	-1692.919
4	0.56667	0.56082	-1561.120	-1561.107
5	0.78722	0.81136	-1249.625	-1249.622
6	1.01013	1.03429	-827.375	-827.373
7	1.22422	1.24838	-462.591	-462.589
8	1.42039	1.44454	-279.349	-279.347
9	1.59165	1.61580	-214.032	-214.031
10	1.73320	1.75619	128.094	128.093

注: u_e 弹性解 u_{ep} 弹塑性解

6 结语

6.1 利用样条子域法和 QR 方法分析双肢剪力墙及框剪结构, 计算简便, 精度高, 可在微机上实现。本文方法只要令塑性项为零即可计算弹性问题。

6.2 本文直接以弹塑性模型为基础建立结构的弹塑性问题的计算格式, 也可用弹粘塑性模型建立计算格式。

参 考 文 献

- [1] 华东水利学院. 弹性力学问题的有限单元法. 水利电力出版社. 1978 年版
- [2] 框架结构弹塑性静力分析. 清华大学研究生论文集
- [3] 高层框架的弹塑性分析. 清华大学论文集
- [4] 秦荣. 结构力学的样条函数方法. 广西人民出版社
- [5] 岩下, 恒雄. 钢筋混凝土结构物二维弹塑性分析的一个方法
- [6] 王祖城, 汪家才. 弹性和塑性理论及有限单元法. 冶金工业出版社. 1983

The Elastic and Plastic Analysis of Double Shear Walls and Frame Shear Structures by Spline Method

Lui Jianxui

(Zhengzhou Institute of Light-Industrg)

Abstract: By using spline and QR method, this paper analysis the elasticity and plasticity of double Shear Walls and frame shear structures and sets up the calculating models. The calculating results show that it is not noly simple to calculate, but also high precision and easy to realize in compter.

Keywords: Spline method, Elasticity and plasticity