第12卷 第2期 郑州工学院学报 Vol.12 No.2
1991年 6月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Jun. 1991

线性规划的可行解集合的几何特征*

舒忠烈

(武汉化工学院)

摘 要: 本文提出平凡解是基可行解，也是极点，对基可行解与极点是等价概念给出一种证明方法，指出 E^n 中的可行解集合有类似 R^2 中的凸多边形的一些特征。

关键词: 线性规划，极点

中国图书分类号: O221·1

1 基本概念与基本定理

1.1 设S是 E^n 中的一个集合．若对于S中的任意两点 X_1、X_2 有:

$$X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2\in S, \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

则称S是一个凸集．

1.2 设S是 E^n 中的一个凸集，$X\in S$，若S中不存在两个不同的点 X_1、X_2 使

$$X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2, \qquad 0<\alpha<1$$

则称X是S的一个极点．

1.3 线性规划的标准形式为: $(L)\ \begin{cases}\min f=CX\\ AX=b\\ X\geqslant 0\end{cases}$

其中A是 $m\times n$ 矩阵，X是n维列向量，C是n维行向量，b是非负的m维列向量，且矩阵A的秩 $R(A)=m$．记:

$$D=\{\ X|AX=b,\quad X\geqslant 0\ \},$$ 它是(L)的可行解集合．

我们知道，若 $D\neq\varphi$，D就是一个凸集．

在矩阵A中任取一个最大线性无关的列向量组，不妨设为 P_1，P_2，…，P_m，记:

$$B=(\ P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_m\ )$$

方程组 $B^{-1}X_B=b$ 有唯一解 $X_B=B^{-1}b$．

*收稿日期: 1990.08.28

若 $B^{-1}b>0$，记$X=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$，则称 X 是(L)的基本行解，B 叫做可行基。

可见一个可行基唯一确定一个基可行解，但基可行解可能对应两个以上的可行基。

例: 设 $X=0$，且 $X\in D$，则 X 是(L)的基可行解，且 X 是 D 的极点。

事实上，A 的任何一个非奇异矩阵都是可行基，平凡解 $X=0$ 是 D 的唯一一点，因此 $X=0$ 既是 D 的基可行解，又是 D 的极点。

基本定理　设 $X\in D$，且 $X\neq 0$，X 是(L)的基可行解的充要条件是 X 的正分量 x_{j1}，x_{j2}，…，x_{jk}所对应的列向量P_{j1}，P_{j2}，…，P_{jk}为线性无关组。

定义 1　设 B_1、B_2 是(L)的两个可行基。若 B_1 与 B_2 中只有一个基向量不同，则称 B_1 与 B_2 相邻，记作$(B_1, B_2)\in E$，并称(B_1, B_2)是以 B_1、B_2 为顶的边。

定义 2　设 V 是(L)的所有可行基的集合，E 是(L)中所有边的集合，构成一个图 $G=(V, E)$，称此图是(L)的可行基图。

定义 3　设 $G_1=(V_1, E_1)$，$G_2=(V_2, E_2)$是(L)的可行基图的两个子图。设 $B_1\in V_1$，$B_2\in V_2$，B_1 的基向量有 k 个与 B_2 的不同，记作 $N(B_1, B_2)=k$，叫做 B_1 与 B_2 的基异数，$0<k<m$。记:　$N(V_1, V_2)=\min\{N(B_1, B_2)|B_1\in V_1, B_2\in V_2\}$

称它是 G_1 与 G_2 的最小基异数。

显然可知，若 $N(V_1, V_2)<1$，则 G_1 与 G_2 至少有一边连接。

2　基可行解与极点的等价性

定理 1　设$X\in D$，X 是 D 的极点的充要条件是 X 为(L)的基可行解。

为了证明本定理，我们来证明两个命题。

命题 1　设 X 是(L)的可行解，但不是(L)的基可行解，则 X 不是 D 的极点。

证: 因为 X 不是(L)的基可行解，故 $X\neq 0$，X 至少有一个正分量，不妨设前 k 个分量为正，余者为零，$1<k<n$。正分量 x_1，x_2，…、x_k 所对应的列向量 P_1，P_2，…，P_k 线性相关，存在不全为零的数 δ_1，δ_2，…，δ_k，使:

$$\sum_{j=1}^{k}\delta_j P_j=0$$

取　$\theta=\min\{\frac{x_j}{|\delta_j|},\ |\delta_j|>0,\ 1\leqslant j\leqslant k\},\qquad \theta>0$

记　$\delta=(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k, 0, 0, \cdots, 0)^T,\qquad \delta\neq 0$

$X\pm\theta\delta\geqslant 0$，　记$X_1=X+\theta\delta$，$X_2=X-\theta\delta$

$X_1\neq X_2$，　$\sum_{j=1}^{n}\theta\delta_j P_j=0$，　$\sum_{j=1}^{n}x_j P_j=b$，　所以有:　$\sum_{j=1}^{n}(x_j\pm\theta\delta_j)P_j=b$

因此X_1、$X_2\in D$，且$X=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$，故X不是极点。

命题 2　设 X 是(L)的基可行解，则 X 是 D 的极点。

证：若 $X=0$，我们知道 X 就是 D 的极点。

若 $X\neq 0$，不妨设前 k 个分量为正，余者为零，$1<k<m$。正分量 x_1，x_2，…，x_k 所对应的列向量 P_1，P_2，…，P_k 线性无关。

设 X'、$X''\in D$，且：　　$X=\alpha X'+(1-\alpha)X''$，　$0<\alpha<1$，

于是 X'、X'' 的分量满足关系：

$$\alpha x_j' + (1-\alpha)x_j'' = 0,\quad j=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ n$$

即：　$x_j' = x_j'' = 0$，　$j=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ n$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j' P_j = b,\qquad \sum_{j=1}^{k} x_j'' P_j = b$$

从而有：　$\sum_{j=1}^{k}(x_j' - x_j'')P_j = 0$，因此有：　$x_j' = x_j''$，　$j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$

即：$X'=X''$。这就说明了 X 是 D 的极点。

由上面两题，便说明(L)的基可行解与 D 的极点相当，从而也就证明了定理 1。

3　基可行解集合 D 的几何特征

我们利用线性代数的知识揭示非空的 D 的几何特点。

定理 2　设 $D\neq\varphi$，$n=m+1$，则 D 中至多有两个极点。

证：我们知道，若 $D\neq\varphi$，则 D 中至少有一个极点。不妨设 $B=(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_m)$是可行基，对应的解 $X_0=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$是 D 的一个极点。$X_0$ 也是 $AX=b$ 的一个特解。记 $\beta=B^{-1}P_{m+1}$，我们知道$\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}$是 $AX=0$ 的基础解系。

$X=X_0+k\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}$是 $AX=b$ 的通解。

设 $X_1 X_2\in D$，且 $X_1\neq X_0$，$X_2\neq X_0$，$X_1\neq X_2$，有：

$$X_1=X_0+k_1\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix},\quad k_1\neq 0,\ k_1\geqslant 0,\quad k_1>0;$$

$$X_2=X_0+k_2\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix},\quad k_2\neq 0,\ k_2\geqslant 0,\quad k_2>0$$

且 $k_1\neq k_2$，不妨设 $k_1<k_2$，

$$X_1-X_0=\frac{k_1}{k_2}k_2\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{k_1}{k_2}(X_2-X_0)$$

记 $\alpha=\frac{k_1}{k_2}$，$0<\alpha<1$，则有：　$X_1=\alpha X_2+(1-\alpha)X_0$，　$0<\alpha<1$

即 X_1 不是极点. 也就说 D 中至多有两个极点.

定理 3 设 $D\neq\varphi$, 且有界, $n=m+1$, 则 D 只含有一线段.

证: 因为 $D\neq\varphi$, 可设 X_0 是 D 的一个极点, 对应基为 $B=(P_1, P_2, \cdots, P_m)$,

$$X_0=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, 0)^T$$

记 $\beta=B^{-1}P_{m+1}$, 因为 D 有界, β 至少有一个分量为正. 设正分量为 β_{i1}, β_{i2}, $\cdots$, β_{ik}, $1<k<m$.

若它们所对应的 x_{i1}^0, x_{i2}^0, $\cdots$, x_{ik}^0 均为正数, 那么 $B^{-1}P_{m+1}$ 作主元列进行一次旋转变换, 得到不同于 X_0 的极点 X_1. 此时, D 只含有线段 (参看定理 2 证明过程) $\alpha X_0+(1-\alpha)X_1$, $0<\alpha<1$.

若 x_{i1}^0, x_{i2}^0, $\cdots$, x_{ik}^0 中至少有一个为零, 不妨设 x_{ik}^0 为零. 设 $X\in D$,

$$X=X_0+\mu\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta_{ik}>0$$

X 的分量 $x_{ik}=-\mu\beta_{ik}>0$, $\mu<0$, 又因为 X 的分量 $x_{m+1}=\mu$, $\mu>0$, 因为 $\mu=0$, 即 $X=X_0$. 这就说明 D 只含有唯一的可行解 X_0, 是一个退化的线段.

定理 4 设 $D\neq\varphi$, 且无界, $n=m+1$, 则 D 只含有一条射线.

证: 因为 $D\neq\varphi$, 取基可行解 X_0, 对应的基为 $B=(P_1, P_2, \cdots, P_m)$, $\beta=B^{-1}P_{m+1}$ 是非正向量, 否则由定理 3 的证明过程看出 D 为有界集合. 且 β 中至少有一个分量为负. 于是:

$$X_0+k\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}\in D, \quad k\geqslant 0$$

我们就称它是以 X_0 为顶点的射线.

设 $X\in D$, 且 $X\neq X_0$, 便有:

$$X=X_0+\mu\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mu\neq 0, \quad \mu=x_{m+1}\geqslant 0, \ \mu>0$$

这就说明D内的点均在上述射线上.

记 $X_1=X_0+2\mu\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_1\in D$, 且有: $X=\frac{1}{2}X_0+\frac{1}{2}X_1$

即 D 只含有唯一极点 X_0, 定理 4 证毕.

定理 5 设 $D\neq\varphi$, $n=m+1$, $k>2$, 且 D 有界, 则(L)的可行基图 G 的最小度 $\delta(G)>k$.

证: 因为 $D\neq\varphi$, 且有界, 任取一个可行基, 不妨设为 $B=(P_1, P_2, \cdots, P_m)$, $B^{-1}P_{m+1}$, $B^{-1}P_{m+2}$, $\cdots$, $B^{-1}P_{m+k}$ 均可作为主元列, 因为它们均含有正分量. 在不考虑目标函数的系数时, 分别对 k 个主元列进行一次转轴变换, 便可得到与 B 相邻的 k 个可行基, 即 B 至少有 k 个相邻的项. 因此可知 $\delta(G)>k$.

定理 6 设 $D\neq\varphi$, 且有界, 则(L)的可行基图: $G=(V, E)$

是连通图，且无悬挂点．

证：(1)若(L)的最优基唯一，由单纯形法，任何一个可行基均可与最优（解）基连通，因此 G 是连通图．又因为 $\delta(G)>k(>2)$，故 G 无悬挂点．

(2)若(L)的最优基不唯一，不妨设只有两个最优基 B_1、B_2．我们分别以 B_1、B_2 为核心构造子图 G_1 和 G_2．

凡作为初始基经过单纯形法而达到 B_1 者的全体（包括 B_1 本身）记为 V_1，得子图 $G_1=(V_1, E_1)$；同样构造子图 $G_2=(V_2, E_2)$．

若 $V_1\cap V_2\neq\varphi$，则 G 显然连通，且无悬挂点．

若 $V_1\cap V_2=\varphi$，则 $N(V_1, V_2)=\rho$，$\rho>1$．取 $B_1^{(1)}\in V_1$，$B_2^{(1)}\in V_2$，且 $N(B_1^{(1)}, B_2^{(1)})=\rho$．不妨设：

$$B_1^{(1)}=(P_1, P_2, \cdots, P_m), \qquad B_2^{(1)}=(P_{\rho+1}, P_{\rho+2}, \cdots, P_{\rho+m})$$

因为 D 有界，所以 $(B_1^{(1)})^{-1}P_{\rho+m}$ 可以作为主元列，进行一次转轴运算，得到一个新的可行基 B，B 与 $B_1^{(1)}$ 相邻．$B\in V_1$ 或 $B\in V_2$．

当 $B\in V_1$ 时，按照 ρ 的定义，$\rho=1$．当 $B\in V_2$ 时，显然 $\rho=1$．

可见 G 是连通图，且无悬挂点．（最优基为两个以上者、采取连通子图合并．）

参 考 文 献

〔1〕林诒勋．线性规划与网络流．郑州大学数学系，1979

〔2〕姜衍智．线性规划原理及应用．陕西科技出版社，1982

〔3〕杨林锡．数学规划的原理和方法．线性规划部分．华中工学院，1985

Notes on Geometry Linear Programming

Shu Zhonglie

(Wuhang Chemical Engineering Institute)

Abstract: This paper, presents several theorems on the geometrical structure of thd set of feasible solutions in a linear programming problem, by means of the concept of "feasible basis graph".

Keywords: linear programming, pole feasible solutions, basis graph