第12卷 第2期 郑州工学院学报 Vol.12 No.2
1991年 6月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Jun. 1991

一类多维高阶 Burgers-KdV 型方程组的周期边值问题*

王书彬 邢家省

(郑州工学院数理力学系) (郑州大学数学研究所)

摘 要: 本文考虑一类多维高阶 Burgers-KdV 型方程组的周期边值问题，采用粘性消去法和 Leray-Schauder 不动点原理，证明了该问题整体弱解的存在性。最后，考虑了广义解的渐近性质。

关键词: 方程组，边值问题，弱解

中国图书分类号: O175

Burgers-KdV方程: $u_t + uu_x - \gamma u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, \quad \gamma > 0, \quad \beta > 0$ (1)

是具有耗散与色散两重作用的系统最简单的方程[1, 2]，不少作者从多方面进行了研究[3, 4, 5]。本文考虑如下一类多维高阶Burgers-KdV型方程组:

$$u_t + \delta\delta_{2p} u + (-1)^p \beta\delta_{2p} u + \delta \operatorname{grad}\varphi(u) = A(x, t)u + g(x, t) \tag{2}$$

其中$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \cdots, u_N(x, t))$为N维向量值未知函数，$x \in R^n$，$t \in R_+$，$A(x, t)$为$N \times N$函数矩阵，$g(x, t)$为N维向量值函数，$\varphi(u)$为向量u的标量函数，$\delta_k = \sum_{i=1}^{n} D_i^k$，$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，$\delta = \delta_1$，"grad" 表示梯度算子，$\beta \geqslant 0$为常数。

我们用正则化方法，考虑相应的具小扩散项的方程组:

$$u_t + (-1)^{p+1} \varepsilon\delta_{2p+2} u + \delta\delta_{2p} u + (-1)^p \beta\delta_{2p} u + \delta \operatorname{grad}\varphi(u) = A(x, t)u + g(x, t) \tag{3}$$

设 $\Omega = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n \mid |x_i| < l, \quad i = 1, 2, \cdots, n\}$,

$Q_T = \{(x, t) | x \in \Omega, \ 0 \leqslant t \leqslant T\} = \Omega \times [0, T], \quad T < \infty$, l为正常数。

对于方程组(2)和(3)，我们讨论在$(n+1)$维柱体Q_T上的周期边值问题:

$$\begin{cases} u(x, t) = u(x + 2le_i, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

* 收稿日期: 1989.06.03

其中$x+2le_i=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+2l,x_{i+1},\cdots,x_n)$，$i=1,2,\cdots,n$，$u_0(x)$为$\overline{\Omega}\subset R^n$上满足周期条件的N维向量值函数.

我们采用如下的约定，向量函数属于某空间，意为向量函数的每个分量属于此空间. 我们在以下提到的周期函数都是指对空间变量x来说的以$2l$为周期的周期函数.

1 基本引理

在本节中，我们考虑如下的线性抛物型方程:

$$v_t+(-1)^{p+1}\varepsilon\delta_{2p+2}v+\delta\delta_{2p}v+(-1)^p\beta\delta_{2p}v=f(x,t) \tag{5}$$

在$Q_T=\Omega\times([0,T])$上的周期边值问题.

$$\begin{cases} v(x,t)=v(x+2le_i,t), & i=1,2,\cdots,n \\ v(x,0)=v_0(x) \end{cases} \tag{6}$$

其中$f(x,t)\in L^2(Q_T)$，$v_0(x)\in H^{p+1}(\Omega)$，$p\geqslant 1$为一整数.

引理1[6]: 对于任何满足周期边值条件的函数$u(x)\in H^{|\alpha|}(\Omega)$，有:

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\prod_{i=1}^n\|D_i^{|\alpha|}u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{\alpha_i}{|\alpha|}} \tag{7}$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)$，$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$，$|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$，$\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为非负整数. 利用积分估计技巧和基本不等式，我们可得如下的结果.

引理2: 对于线性抛物型方程(5)周期边值问题(6)的广义解有如下的估计:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(\cdot,t)\|_{H^{p+1}(\Omega)}+\|v\|_{W_2^{(2p+2,1)}(Q_T)}\leqslant C_1\{\|v_0\|_{H^{p+1}(\Omega)}+\|f\|_{L^2(Q_T)}\} \tag{8}$$

其中常数C_1与l无关，但依赖于$T<\infty$和$\varepsilon>0$.

如果我们用光滑函数$f_m(x,t)$，$v_{0m}(x)$分别逼近函数$f(x,t)$，$v_0(x)$，那么对$f_m(x,t)$和$v_{0m}(x)$可以得方程(5)的周期边值问题(6)的古典解$v_m(x,t)$，从而利用引理2的估计可以得到:

引理3: 设$\varepsilon>0$，$f(x,t)\in L^2(Q_T)$和$v_0(x)\in H^{p+1}(\Omega)$，则线性抛物型方程(5)的周期边值问题(6)有唯一的广义解，

$$v(x,t)\in Z=L^\infty(0,T;\quad H^{p+1}(\Omega))\bigcap W_2^{(2p+2,1)}(Q_T) \tag{9}$$

满足:
$$\int_0^T\int_\Omega(v_t+(-1)^{p+1}\varepsilon\delta_{2p+2}v+\delta\delta_{2p}v+(-1)^p\beta\delta_{2p}v)\psi(x,t)dxdt$$
$$=\int_0^T\int_\Omega f(x,t)\psi(x,t)dxdt \tag{10}$$

对任意的$\psi(x,t)\in L^2(Q_T)$成立，并且满足初值条件 $v(x,0)=v_0(x)$.

引理4：设$B=L^{\infty}(0, T;\ L^2(\Omega))\cap L^2(0, T;\ H^{p+1}(\Omega))$，则$Z\subset B$。

引理5：设$f_n(x)$，$f(x)\in L^2(E)$，E是R^n中的可测集，若$\{\|f_n\|_{L^2(E)}\|\}$一致有界，且$f_n \xrightarrow[E]{a\cdot e} f$，$(n\to\infty)$，则$f_n(x)$在$L^2(E)$中弱收敛于$f(x)$。

引理6[7]：（Sobolev估计），设$u(x)\in L^q(\Omega)$，$D^m u\in L^r(\Omega)$，$1\leqslant q$，$r\leqslant\infty$，$\Omega\subset R^n$且$0\leqslant j\leqslant m$，$j/m\leqslant a<1$，$1\leqslant p<\infty$，并假设：

$$\frac{1}{p}=\frac{j}{n}+a\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-a)\frac{1}{q}$$

则存在常数C_2使得：
$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)}\leqslant C_2\|D^m u\|^a_{L^r(\Omega)}\cdot\|u\|^{1-a}_{L^q(\Omega)} \tag{11}$$

引理7[8]：设$u(x)\in H^{S_1}(\Omega)\cap H^{-S_2}(\Omega)$，$S_1$、$S_2\geqslant 0$，

则成立不等式：
$$\|D^S u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_3\|u\|^{1-\theta}_{H^{-S_2}(\Omega)}\|u\|^{\theta}_{H^{S_1}(\Omega)} \tag{12}$$
其中常数$C_3=C_3(S_1, S_2, S)$且$S=\theta S_1-(1-\theta)S_2\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<1$。

2 非线性抛物型方程组(3)的周期边值问题

引理8：设$\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_N)\in C^2(R^N)$，且满足条件：

① $|\varphi(v)|\leqslant K|v|^{S+2}$，

② $|\mathrm{grad}\varphi(v)|\leqslant K|v|^{S+1}$，

③ $\left|\dfrac{\partial^2\varphi(v)}{\partial v_i\partial v_j}\right|\leqslant K(|v|^S+1)$，$(i, j=1, 2, \cdots, N)$，

其中$S=\dfrac{4p}{n}-\delta>0$，$\delta>0$，K为一常数，则对任何的$\eta>0$，有：

$$\|\delta\mathrm{grad}\varphi(v)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\eta\|v\|_{H^{2p+1}(\Omega)}+C_4\|v\|_{L^2(\Omega)} \tag{13}$$
$$\|\mathrm{grad}\varphi(v)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\eta\|v\|_{H^{2p}(\Omega)}+C_5\|v\|_{L^2(\Omega)} \tag{14}$$
$$\|\varphi(v)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\eta\|v\|^2_{H^p(\Omega)}+C_6\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{15}$$

其中$v(x)\in H^{2p+1}(\Omega)$是周期向量值函数，常数C_4，C_5，C_6依赖于η和$\|v\|_{L^2(\Omega)}$，且对有界的$\|v\|_{L^2(\Omega)}$一致有界。

证明：由引理的条件利用Holder不等式和Sobolev估计以及带ε的Young不等式，即可得到引理的结果。可参看文献[6]中的证明。

定理1：设方程组(3)（$\varepsilon>0$）和周期初值向量函数$u_0(x)$满足以下条件：

① $u_0(x)\in H^{p+1}(\Omega)$；

② 矩阵$A(x, t)\in L^{\infty}(0, T;\ W^{(P)}_{\infty}(\Omega))$，N维向量值函数$g(x, t)$

$\in L^{\infty}(0, T; \ L^2(\Omega))\bigcap L^2(0, T; \ H^p(\Omega))$且$A(x, t)$，$g(x, t)$都是周期函数；

③ φ满足引理8中的条件。

则方程组(3)的周期边值问题(4)至少有一个N维向量值整体广义解

$$u(x, t)\in L^{\infty}(0, T; \ H^{p+1}(\Omega))\bigcap W_2^{(2p+2,1)}(Q_T).$$

证明：取基空间$B = L^{\infty}(0, T; \ L^2(\Omega))\bigcap L^2(0, T; \ H^{2p+1}(\Omega))$，对每一个$v\in B$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，考虑方程组：

$$u_t + (-1)^{p+1}\varepsilon\delta_{2p+2}u + \delta\delta_{2p}u + (-1)^p\beta\delta_{2p}u = \lambda h(x, t, v(x, t)) \qquad (3)_\lambda$$

的周期边值问题：
$$\begin{cases} u(x + 2le_i, t) = u(x, t), \quad i = 1, ,2 \cdots, n \\ u(x, 0) = \lambda u_0(x) \end{cases} \qquad (4)_\lambda$$

其中$h(x, t, v(x, t)) = A(x, t)v + g(x, t) - \delta\operatorname{grad}\varphi(v)$.

由引理8和$h(x, t, v(x, t))\in L^2(Q_T)$，再根据引理3得$(3)_\lambda$，$(4)_\lambda$存在唯一的广义解$u(x, t)\in Z$。因此对每一个$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，我们可以定义映射$T_\lambda$：$B\to Z\subset B$使得：

$$u = T_\lambda v, \quad \forall v\in B$$

下面利用Leray－Schauder不动点原理证明如上作出的映射T_λ：$B\to B$具有不动点。

对B中的有界集M，$h(x, t, v)(v\in M)$在$L^2(Q_T)$中一致有界，由引理2知$T_\lambda(M)$在Z中有界，而由$Z \hookrightarrow B$，所以对每一个$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$T_\lambda$：$B\to Z\subset B$是列紧算子。

我们用拓扑方法证明T_λ：$B\to B$是连续的。设$v_m(x, t)$是B中的收敛序列，且v_m强收敛于$v\in B(m\to\infty)$，记$u_m = T_\lambda v_m$，则$\{u_m\}$在Z中一致有界，因为$Z \hookrightarrow B$，所以从$\{u_m\}$中的任意子序列中可选出子序列在B中收敛，如果能证明所有这些子序列的极限是同一个函数，我们就得到$\{u_m\}$在B中收敛。

在$\{u_m\}$的任意子序列中存在子序列$\{u_{mk}\}$并存在N维向量值函数$u(x, t)$，使得当$m_k\to\infty$时，

$u_{mkt}(x, t)\to u_t(x, t)$，在$L^2(Q_T)$中弱收敛，

$D^\alpha u_{mk}(x, t)\to D^\alpha u(x, t)$，$|\alpha|\leqslant 2p+2$，在$L^2(Q_T)$中弱收敛，

$u_{mk}(x, t)$在B中强收敛于$u(x, t)$.

和$\{u_{mk}(x, t)\}$相对应的$\{v_{mk}(x, t)\}$在Q_T上满足：

$$D^\alpha v_{mk}(x, t) \xrightarrow{a.e.} D^\alpha v(x, t), \quad |\alpha|\leqslant 2p+1,$$

$$h(x, t, v_{mk}(x, t)) \xrightarrow{a.e.} h(x, t, v(x, t)).$$

又因为$h(x, t, v_{mk}(x, t))$在$L^2(Q_T)$中是一致有界的，所以：

$$h(x, t, v_{mk}(x, t))\to h(x, t, v(x, t))\text{在}L^2(Q_T)\text{中弱收敛,}$$

由$u_{mk}=T_\lambda v_{mk}$是方程组

$$u_{mkt}+(-1)^{p+1}\varepsilon\delta_{2p+2}u_{mk}+\delta\delta_{2p}u_{mk}+(-1)^p\beta\delta_{2p}u_{mk}=\lambda h(x,\ t,\ v_{mk})$$

周期边值问题的广义解，上式两端对$k\to\infty$取极限，得到$u(x,\ t)$是方程组：

$$u_t+(-1)^{p+1}\varepsilon\delta_{2p+2}u+\delta\delta_{2p}u+(-1)^p\beta\delta_{2p}u=\lambda h(x,\ t,\ v)$$

周期边值问题的广义解，根据广义解的唯一性知$u=T_\lambda v$. 由此我们证明了$\{u_m\}$在B中收敛于$T_\lambda v$，即$T_\lambda v_m\to T_\lambda v(m\to\infty)$，从而可知$T_\lambda$：$B\to B$是全连续映射.

对B中的有界集M，$T_\lambda(v)$，$v\in M$关于参数λ的一致连续性可用类似于文献[6]中的办法来证明. 显然有$T_0B=0$.

为利用不动点原理，我们还需要得到T_λ：$B\to B$所有可能的不动点的一致有界性估计，也就是要得到方程组：

$$\begin{aligned}&u_t+(-1)^{p+1}\varepsilon\delta_{2p+2}u+\delta\delta_{2p}u+(-1)^p\beta\delta_{2p}u+\lambda\delta\operatorname{grad}\varphi(u)\\&=\lambda(A(x,\ t)u+g(x,\ t))\end{aligned}\tag{3}_{\lambda'}$$

周期边值问题
$$\begin{cases}u(x+2le_j,\ t)=u(x,\ t)\\u(x,\ 0)=\lambda u_0(x)\end{cases}\tag{4}_{\lambda'}$$

所有可能解的一致性估计.

利用积分估计技巧和引理8的结果及基本不等式，我们可以得到：

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,\ t)\|_{H^p(\Omega)}+\sqrt{\varepsilon}\|u\|_{L^2(0,\ T;\ H^{2p+1}(\Omega))}+\|u\|_{L^2(0,\ T;\ H^{2p}(\Omega))}\\&\leqslant C_7\{\|u\|_{H^p(\Omega)}+\|g\|_{L^2(0,\ T;\ H^p(\Omega))}\}\end{aligned}\tag{16}$$

其中常数C_7不依赖于$0\leqslant\lambda\leqslant1$，$\varepsilon>0$. 证明过程类似于文献[6]的方法.

综上所述结果，由 Leray-Schauder 不动点原理知当 $\lambda=1$ 时，映射 T_1：$B\to B$ 存在不动点 $u=T_1u\in Z$，即方程组(3)的周期边值问题(4)存在广义解 $u(x,\ t)\in Z$.

利用文献[7]中的办法我们同样可以得到唯一性定理.

定理 2：设定理 1 的条件满足且设 $2p>n$，$\varphi(u)\in C^3(R^N)$，则周期边值问题(3)、(4)的广义解 $u(x,\ t)\in Z$，是唯一的.

3 方程组(2)周期边值问题(4)的弱解

在上节中，我们可以看到，在证明方程组(3)周期边值问题(4)广义解存在性的同时，还得到如下结论.

引理 9：设定理 1 的条件满足，则对具有小扩散项($\varepsilon>0$)的方程组周期边值问题(3)，(4)的广义解 $u_\varepsilon(x,\ t)$有如下估计：

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_\varepsilon(\cdot,\ t)\|_{H^p(\Omega)}+\sqrt{\varepsilon}\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,\ T;\ H^{2p+1}(\Omega))}+\|u\|_{L^2(0,\ T;\ H^{2p}(\Omega))}$$

$$\leqslant C_8 \tag{17}$$

其中常数C_8不依赖于$\varepsilon>0$和$l>0$。

引理10：在定理1的条件下，对具扩散系数$\varepsilon>0$的方程组(3)的周期边值问题(4)的广义解有估计式：$\|u_t\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))}\leqslant C_9$ (18)

其中常数C_9不依赖于$\varepsilon>0$和$l>0$。

证明：设$\psi(x,t)\in L^2(0,T;\ H_0^2(\Omega))$，则有：

$$\int_0^T\int_\Omega u_t\cdot\psi dxdt=\int_0^T\int_\Omega[Au+g-(-1)^{p+1}\varepsilon\delta_{2p+2}u-\delta\delta_{2p}u-(-1)^p\beta\delta_{2p}u-\delta\mathrm{grad}\varphi(u)]\cdot\psi dxdt$$

因为$\left|\int_0^T\int_\Omega\varepsilon\delta_{2p+2}u\cdot\psi dxdt\right|=\left|\int_0^T\int_\Omega\varepsilon\sum_{i=1}^n D_i^{2p}uD_i^2\psi dxdt\right|$

$$\leqslant\|u\|_{L^2(0,T;H^{2p}(\Omega))}\|\psi\|_{L^2(0,T;H_0^2(\Omega))},\quad(0<\varepsilon<1)$$

$$\left|\int_0^T\int_\Omega\delta\delta_{2p}u\cdot\psi dxdt\right|=\left|\int_0^T\int_\Omega\delta_{2p}u\cdot\delta\psi dxdt\right|$$

$$\leqslant\|u\|_{L^2(0,T;H^{2p}(\Omega))}\|\psi\|_{L^2(0,T;H_0^2(\Omega))}$$

$$\left|\int_0^T\int_\Omega\delta\mathrm{grad}\varphi(u)\cdot\psi dxdt\right|=\left|\int_0^T\int_\Omega\mathrm{grad}\varphi(u)\cdot\delta\psi dxdt\right|$$

$$\leqslant K_1\|u\|_{L^2(0,T;H^{2p}(\Omega))}\|\psi\|_{L^2(0,T;H_0^2(\Omega))}$$

由引理9的估计得到：$\int_0^T\int_\Omega u_t\cdot\psi dxdt\leqslant K_2\|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^2(\Omega))}$

由此得到估计式(18)。

引理11：在引理10的条件下，对于周期边值问题(3)、(4)的广义解有估计：

$$\|D^\alpha u(\cdot,t_1)-D^\alpha u(\cdot,t_2)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_{10}|t_1-t_2|^{\frac{p-|\alpha|}{2(p+2)}} \tag{19}$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|=0,1,\cdots,p-$ ，常数C_{10}不依赖于$\varepsilon>0$和$l>0$。

证明：由引理7我们有：

$$\|D^\alpha u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant K_3\|u(\cdot,t)\|_{H^{-2}(\Omega)}^{\frac{p-|\alpha|}{p+2}}\|u(\cdot,t)\|_{H^p(\Omega)}^{\frac{2+|\alpha|}{p+2}}$$

其中$|\alpha|=0,1,\cdots,p-1$，对$D^\alpha u(\cdot,t_1)-D_\alpha u(\cdot,t_2)$应用这个不等式可得：

$$\|D^\alpha u(\cdot,t_1)-D^\alpha u(\cdot,t_2)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant 2K_3\|u(\cdot,t_1)-u(\cdot,t_2)\|_{H^{-2}(\Omega)}^{\frac{p-|\alpha|}{p+2}}\cdot\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{H^p(\Omega)}^{\frac{2+|\alpha|}{p+2}}$$

$$\leqslant K_4\left\|\int_{t_2}^{t_1}\frac{\partial u}{\partial t}dt\right\|_{H^{-2}(\Omega)}^{\frac{p-|\alpha|}{p+2}}\leqslant K_4\left|\int_{t_2}^{t_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{H^{-2}(\Omega)}dt\right|^{\frac{p-|\alpha|}{2(p+2)}}$$

$$\leqslant K_4\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;H^{-2}(\Omega))}|t_1-t_2|^{\frac{p-|\alpha|}{2(p+2)}}$$

即得(19)式。

定义Ⅰ：N维向量值函数 $u(x,t)\in L^2(0,T;\ H^{2p}(\Omega))$ 称为多维高阶 Burgers-KdV 型方程组(2)周期边值问题(4)的一个整体弱解，如果对任意的试验函数 $\psi(x,t)\in W_2^{(1,1)}(Q_T)$，$\psi(x,t)$ 是关于 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 具周期 $2l$ 的函数且 $\psi(x,T)\equiv 0$，成立等式：

$$\int_0^T\int_\Omega[\psi_t\cdot u+\delta_{2p}u\cdot\delta\psi+(-1)^{p+1}\beta\delta_{2p}u\cdot\psi+\psi\cdot Au+\mathrm{grad}\varphi(u)\cdot\delta\psi$$
$$+\psi\cdot g]dxdt+\int_\Omega\psi(x,0)u_0(x)dx=0 \tag{20}$$

对具扩散系数 $\varepsilon>0$ 的方程组(3)周期边值问题(4)的广义解 $u_\varepsilon(x,t)$ 有积分关系式：

$$\int_0^T\int_\Omega[\psi_t\cdot u_\varepsilon+(-1)^{p+1}\varepsilon\sum_{i=1}^n D_i^{2p+1}u_\varepsilon D_i\psi+\delta_{2p}u_\varepsilon\delta\psi+(-1)^{p+1}\beta\delta_{2p}u_\varepsilon\psi$$
$$+\mathrm{grad}\varphi(u_\varepsilon)\delta\psi+\psi\cdot Au_\varepsilon+\psi g]dxdt+\int_\Omega\psi(x,0)u_0(x)dx=0 \tag{20$_\varepsilon$}$$

从这一节中的三个引理可推出周期边值问题(3)、(4)的广义解集合 $\{u_\varepsilon(x,t)\}(\varepsilon>0)$，在函数空间 $L^\infty(0,T;\ H^p(\Omega))\cap L^2(0,T;\ H^{2p}(\Omega))\cap\{\bigcap_{k=0}^{p-1}C^{(0,\frac{p-k}{2p+4})}(0,T;\ H^k(\Omega))\}$ 中是一致有界的，由紧致性，我们可选出子序列 u_{ε_s} 并存在N维向量值函数 $u(x,t)$ 使得当 $s\to\infty$，$\varepsilon_s\to 0$ 时，u_{ε_s} 依能够使极限通过 $(20)_\varepsilon$ 式的意义下收敛于 $u(x,t)$，再使用和文献[6]相类似的办法可知当 $\varepsilon_s\to 0$ 时，积分关系式 $(20)_\varepsilon$ 的极限为积分关系式(20)，这就证明了 $u(x,t)$ 为周期边值问题(2)、(4)的弱解。

定理3：设引理11的条件满足，则多维高阶 Burgers-KdV 型方程组(2)周期边值问题(4)至少有一个N维向量值的整体弱解：

$$u(x,t)\in L^\infty(0,T;\ H^p(\Omega))\cap L^2(0,T;\ H^{2p}(\Omega))\cap\{\bigcap_{k=0}^{p-1}C^{(0,\frac{p-k}{2p+4})}([0,T];\ H^k(\Omega))\}$$

4 广义解当 $t\to\infty$ 时的渐近性

设方程组(2)、(3)的系数矩阵 $A(x,t)$ 是负定的，即存在正常数 $b>0$，使得对任何N维向量 $\xi\in R^N$ 成立不等式：　$(\xi,A\xi)\leqslant -b|\xi|^2$

对于上面提到的问题的广义解和整体弱解 $u(x,t)$，令 $u(x,t)=e^{\alpha t}v(x,t)$，($\alpha$ 待定)则有：

$$v_t+(-1)^{p+1}\varepsilon\delta_{2p+2}v+\delta\delta_{2p}v+(-1)^p\beta\delta_{2p}v+e^{-\alpha t}\delta\mathrm{grad}\varphi(e^{\alpha t}v)$$
$$=A(x,t)v+e^{-\alpha t}g(x,t)-\alpha v \tag{21}$$

其中 $\varepsilon\geqslant 0$。用 v 与(21)式作内积，并在 $Q_t(0<t<\infty)$ 上积分得：

$$\|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant(-2b-2\alpha)\int_0^t\|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt+2\int_0^t\int_\Omega(v,e^{-\alpha t}g(x,t))dxdt+\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leqslant(-b-2\alpha)\int_0^t\|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau+\frac{1}{b}\int_0^\infty\int_\Omega e^{-2\alpha t}|g(x,t)|^2dxdt+\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

选取 α 使得 $-b-2\alpha>0$，特别地取 $\alpha=-b$，由Gronwall不等式得：

$$\|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant e^{(-b-2\alpha)t}\{\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{b}\int_0^\infty\int_\Omega e^{-2\alpha t}|g(x,t)|^2dxdt$$

于是得到：　$\|u(\cdot, t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant e^{-bt}\{\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{b}\int_0^\infty\int_\Omega e^{2bt}|g(x, t)|^2 dxdt\}$

不等式两端取极限$t \to \infty$即得到：

定理4：设$A(x, t)$为负定的$N \times N$矩阵，$(\xi, A\xi) \leqslant -b|\xi|^2$，$b > 0$，$e^{bt}g(x, t) \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$，则对方程组(2)和(3)的周期边值问题(4)的整体弱解和广义解具有渐近性质：　$\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$

由本文的结果用类似于文[6]的方法可以考虑方程组(2)的初值问题。

本文是在陈国旺教授的鼓励和支持下完成，特此致谢。

参　考　文　献

〔1〕 Jeffrey.A. and Kakutani T. Weak nonlinear dispersive wave: a discussion centered around the kortewey-de-Vries equation. SIAM Review 14(4), 1972, P582-643

〔2〕 Suc.H. and Gardner C.S.. KdV equation and generalizations IV. Derivation of the KdV equation and Burgers. J.Math.Phys. 1969, 10: 536-539

〔3〕 管克英，高歌. Burgers-KdV混合型方程行波解的定性分析. 中国科学，A辑，1987, 1: 64-73

〔4〕 Guan Keying. Static solutions of mixed Burgers-KdV equation I. J.Partical Different Equations, 1988, 1(2), Series A, 71-81

〔5〕 李志深，黄正洪. KdV-Burgers方程的Cauchy问题. 应用数学，Vol.1, 1988, 3: 57-62

〔6〕 周毓麟，郭柏灵. 高阶多变量Kortewey-de Vries型方程组整体弱解的存在性、 中国科学，1985, 12: 1083-1095

〔7〕 Nirenberg, L.. Annali della Scuola Norm, Sup.Pisa. 1959, 13(3): 115-162

〔8〕 Lions, J.L. and Magenes E.. Non-homogeneous Boundary Value Problems and Application I., Springer-Verlay, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, 72-73(有中译本)

The Periodic Boundary Value Problem for a Class of Systems of MultiJimensional Brugers-KdV Types of Higher Order

Wang Shubin　　　　Xing Jiasheng
(ZhengZhou Inst. of Tech.)　　(ZhengZhou University)

Abstract: In this paper we consider the periodic boundary value problem for a class of multidimensional Burgers-KdV equations of higher order. We have proved the existence of global weak solution for this problem and the asymptotic behavior as $t \to \infty$ is discussed.

Keywords: simultaneos equations, Boundary-Value problem, weak solution