

主轴径向平面运动及偏心*

黄仁贵

(郑州工学院机械系)

摘 要: 本文对主轴径向平面运动作了进一步的数学分析, 得到了描述该运动的各种曲线方程的向量形式, 它们具有广泛的意义; 利用这些方程对主轴径向平面运动进行了运动学分析; 阐明切削加工圆度误差与标准球心径向误差运动的正一次谐波无关, 而与其非正一次谐波有关; 明确了标准球偏心的物理意义。

关键词: 主轴, 回转误差, 偏心

中国图书分类号: TG502·12; TH113·2

分析主轴径向平面运动是研究主轴空间运动的基础, 所以深入认识径向平面运动是非常重要的, 这将为分析和评定主轴运动精度提供理论依据。本文就此作一讨论。

如图 1 所示, XO_1Y 为静坐标系, UOV 为动坐标系, 它固定在主轴回转平面上, 原点 O 为标准球球心, 主轴以定角速度 ω 转动。显然, 主轴径向平面运动可以认为回转平面以 ω 绕球心转动, 同时随球心作平动。

采用双向测量法拾取标准球心的位置信号为 $X(t)$ 、 $Y(t)$, 它们一般是非周期函数。球心径向误差运动可以表示为:

$$F(t) = X(t) + jY(t) \quad (1)$$

可以证明, $F(t)$ 又可表示为:

$$F(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} F_K(t) \quad (2)$$

$$F_K(t) = R_K e^{j(K\omega t + \varphi_K)} \quad (3)$$

式中, $F_K(t)$ 是 $F(t)$ 的 K 次谐波, 它是个旋转向量; K 为任意实数; R_K 为 K 次谐波的模; $K\omega$ 为 K 次谐波的转动角速度; φ_K 为 K 次谐波的初相位。根据式(1)和(3)得 K 次谐

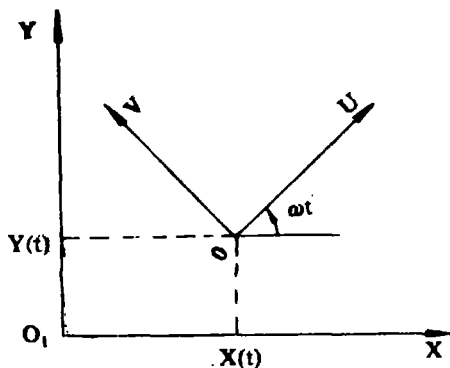


图 1

* 收稿日期: 1990.07.27

波在 XO_1Y 上的投影为:

$$\begin{cases} X_K(t) = R_K \cos(K\omega t + \varphi_K) \\ Y_K(t) = R_K \sin(K\omega t + \varphi_K) \end{cases} \quad (4)$$

根据运动学理论, 主轴径向平面运动可以用一对瞬心线的运动来描述, 即动瞬心线在静瞬心线上以角速度 ω 作纯滚动与主轴径向平面运动是等价的。文献[1]根据微分几何学原理得到了描述主轴径向平面运动的静、动瞬心线的方程; 还得到了定点在主轴回转平面上描绘的轨迹——动轮转曲线的方程, 以及主轴上一点在静坐标系上描绘的轨迹——静轮转曲线的方程。这四种曲线表征了主轴径向平面运动的特征。在切削加工中, 动、静轮转曲线分别为车削和镗削的加工曲线。当得到标准球心径误差运动 $F(t)$ 时, 便可得出这些曲线的方程。

1 一次谐波的运动分析

若球心径向误差运动 $F(t)$ 为一次谐波, 即:

$$F(t) = R_1 e^{j\omega t + \varphi_1} + R_{-1} e^{j(-\omega t + \varphi_{-1})} \quad (5)$$

由 $F(t)$ 产生的四种曲线的方程为:

静瞬心线 $C(t)$ 的方程:

$$\begin{cases} X_C = 2R_{-1} \cos(-\omega t + \varphi_{-1}) \\ Y_C = 2R_{-1} \sin(-\omega t + \varphi_{-1}) \end{cases} \quad (6)$$

动瞬心线 $D(t)$ 的方程:

$$\begin{cases} u_D = R_{-1} \cos(-2\omega t + \varphi_{-1}) - R_1 \cos\varphi_1 \\ v_D = R_{-1} \sin(-2\omega t + \varphi_{-1}) - R_1 \sin\varphi_1 \end{cases} \quad (7)$$

静轮转曲线 $L(t)$ 的方程:

$$\begin{cases} X_L = u_Q \cos\omega t - v_Q \sin\omega t + R_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + R_{-1} \cos(-\omega t + \varphi_{-1}) \\ Y_L = u_Q \sin\omega t + v_Q \cos\omega t + R_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + R_{-1} \sin(-\omega t + \varphi_{-1}) \end{cases} \quad (8)$$

式中, u_Q 、 v_Q 是 UOV 上点 Q 的坐标。

动轮转曲线 $M(t)$ 的方程:

$$\begin{cases} u_M = X_P \cos\omega t + Y_P \sin\omega t - R_1 \cos\varphi_1 - R_{-1} \cos(-2\omega t + \varphi_{-1}) \\ v_M = -X_P \sin\omega t + Y_P \cos\omega t - R_1 \sin\varphi_1 - R_{-1} \sin(-2\omega t + \varphi_{-1}) \end{cases} \quad (9)$$

式中, X_P 、 Y_P 为 XO_1Y 上点 P 的坐标。

应用尤拉公式各曲线方程可写为以下向量形式:

$$C(t) = 2R_{-1} e^{j(-\omega t + \varphi_{-1})} \quad (10)$$

$$D(t) = R_{-1} e^{j(-2\omega t + \varphi_{-1})} - R_1 e^{j\varphi_1} \quad (11)$$

$$L(t) = (u_Q + jv_Q) e^{j\omega t} + R_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} + R_{-1} e^{j(-\omega t + \varphi_{-1})} \quad (12)$$

$$M(t) = (X_p + jY_p)e^{-j\omega t} - R_{-1}e^{j(-2\omega t + \varphi_{-1})} - R_1e^{j\varphi_1} \quad (13)$$

式(10)和(11)分别表示 $C(t)$ 与 $D(t)$ 在切点(瞬心)处的向量。两条瞬心线都是圆, $C(t)$ 的圆心为回转中心, $D(t)$ 的圆心为回转轴心, $C(t)$ 的半径为 $D(t)$ 的半径的二倍。

当 $R_{-1}=0$, 由式(5)知, $F(t)=F_1(t)=R_1e^{j(\omega t + \varphi_1)}$, 即 $F(t)$ 为正一次谐波, 球心以 $\bar{\omega}$ 作圆周运动。现在来分析由正一次谐波产生的各曲线方程。从式(10)和(11)知, $C(t)$ 与 $D(t)$ 皆为一圆, 即为回转中心和回转轴心, 它们重合在 O_1 点上, 这时主轴回转平面以 $\bar{\omega}$ 绕定点 O_1 作旋转运动。从式(12)得:

$$L(t) = (u_Q + jv_Q + R_1e^{j\varphi_1})e^{j\omega t}$$

从式(13)得: $M(t) = (X_p + jY_p)e^{-j\omega t} - R_1e^{j\varphi_1}$

显然, 静、动轮转曲线皆为圆, 可见正一次谐波 $F_1(t)$ 不产生运动误差, $F_1(t)$ 是由标准球安装偏心引起的。球心与回转轴心之间的距离为 R_1 , 即为偏心距。

当 $R_1=0$, 即正一次谐波为零, $F(t)$ 为负一次谐波 $F_{-1}(t)=R_{-1}e^{j(-\omega t + \varphi_{-1})}$, 球心以 $\bar{\omega}$ 作圆周运动。由 $F_{-1}(t)$ 产生的各曲线方程为:

$$C'(t) = 2R_{-1}e^{j(-\omega t + \varphi_{-1})} \quad (14)$$

$$D'(t) = R_{-1}e^{j(-2\omega t + \varphi_{-1})} \quad (15)$$

$$L'(t) = (u_Q + jv_Q)e^{j\omega t} + R_{-1}e^{j(-\omega t + \varphi_{-1})} \quad (16)$$

$$M'(t) = (X_p + jY_p)e^{-j\omega t} - R_{-1}e^{j(-2\omega t + \varphi_{-1})} \quad (17)$$

由式(10)和(14)知, $C(t)$ 与 $C'(t)$ 是同一个圆。由式(11)和(15)知, $D(t)$ 与 $D'(t)$ 也是同一个圆, $D(t)$ 的圆心坐标为 $(-R_1\cos\varphi_1, -R_1\sin\varphi_1)$, $D'(t)$ 的圆心为球心 O , 二者圆心坐标不同是因球心位置不同, $C(t)$ 与 $D(t)$ 以及 $C'(t)$ 与 $D'(t)$ 皆相互内切, 如图2、图3所示。图2表示球心 O 偏离回转轴心的距离为 R_1 , 图3表示球心 O 与回转轴心重合。

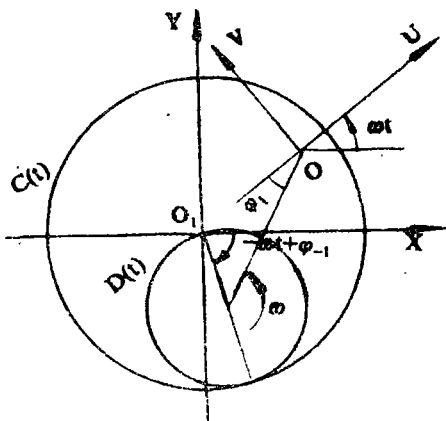


图 2

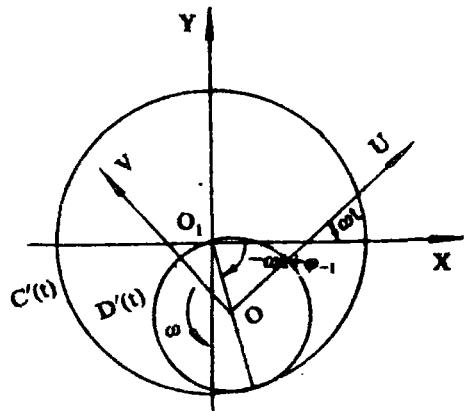


图 3

从式(12)和(16)知, $L(t)$ 与 $L'(t)$ 都是椭圆, 尽管 $L(t)$ 比 $L'(t)$ 多一个向量——正一次谐

波, 但它们的长半轴与短半轴之差即圆度误差都为 $2R_{-1}$.

从式(13)和(17)知, $M(t)$ 和 $M'(t)$ 在主轴回转平面上是同一条心形线, $M(t)$ 中的常向量 $-R_1 e^{j\varphi_1}$ 是标准球偏心引起的.

总之, 当 $F(t)$ 是一次谐波时, 正一次谐波是标准球偏心引起的, 它不会产生运动误差, 而负一次谐波产生运动误差.

对于一个主轴系统, 它的运动规律是一定的, 描述该运动规律的 $C(t)$ 和 $D(t)$ 当然是唯一确定的. 由式(10)和(11)知, $C(t)$ 和 $D(t)$ 仅与负一次谐波 $F_{-1}(t)$ 有关, 所以 $F_{-1}(t)$ 也是唯一确定的. 另外, 根据行星运动分析, 回转轴心即 $D(t)$ 的圆心绕回转中心即 $C(t)$ 的圆心作圆周运动, 该运动可用旋转向量 $R_{-1} e^{j(-\omega t + \varphi_{-1})}$ 来描述, 这正是负一次谐波 $F_{-1}(t)$, 这也说明 $F_{-1}(t)$ 是主轴系统所固有的. 因此, 当调整标准球心的位置时, 仅改变正一次谐波, 而负一次谐波不变.

分析式(5), 把 $F(t)$ 转动一个定角度 $-\frac{(\varphi_1 + \varphi_{-1})}{2}$, 显然并不改变 $F(t)$ 的几何形状尺寸, 即:

$$F(t) e^{-j\frac{(\varphi_1 + \varphi_{-1})}{2}} = R_1 e^{j\omega t + \frac{(\varphi_1 - \varphi_{-1})}{2}} + R_{-1} e^{-j\omega t + \frac{(\varphi_1 - \varphi_{-1})}{2}}$$

可见球心运动轨迹为椭圆. 调整球心位置, 使偏心距 $R_1 = 0$, $F(t)$ 为负一次谐波, 即为纯误差运动. 当 $R_1 = R_{-1}$ 时, $F(t)$ 为一次谐波, 可见即使球心作一次谐波, $F(t)$ 也包含因偏心引起的正一次谐波. 所以, 文献[4]中所述“若无安装偏心, 即 $\bar{e} = 0$, 主轴的基频谐振将使标准球球心作频率为 ω 的直线往复运动.”是不确切的.

2 主轴径向平面运动及偏心

双向法测得标准球心径向误差运动可用式(2)来表示, 即:

$$F(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} R_K e^{jK\omega t + \varphi_K} \quad (18)$$

由 $F(t)$ 产生的表征主轴径向平面运动特性的四种曲线方程为:

静瞬心线的方程:

$$C(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} (1-K) R_K e^{jK\omega t + \varphi_K} \quad (19)$$

动瞬心线的方程:

$$D(t) = - \sum_{K=-\infty}^{\infty} K R_K e^{j(K-1)\omega t + \varphi_K} \quad (20)$$

静轮转曲线的方程:

$$L(t) = (u_Q + jv_Q) e^{j\omega t} + \sum_{K=-\infty}^{\infty} R_K e^{jK\omega t + \varphi_K} \quad (21)$$

式中, u_Q 、 v_Q 为 UOV 上点 Q 的坐标.

动轮转曲线的方程:

$$M(t) = (X_p + jY_p)e^{-j\omega t} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k e^{j(K-1)\omega t + \varphi_k} \quad (22)$$

式中, X_p 、 Y_p 为 XO_1Y 上点 P 的坐标。

主轴径向平面运动可以用 $D(t)$ 在 $C(t)$ 上以角速度 ω 作纯滚动来描述。式(19)和(20)分别表示 t 时刻 $C(t)$ 与 $D(t)$ 在切点(瞬心)处的向量。 $L(t)$ 和 $M(t)$ 分别代表镗削和车削的加工曲线, 它们的几何形状尺寸与 $F(t)$ 及切削点的位置有关。式(21)表明主轴径向平面运动可以分解为回转平面以 ω 绕球心的转动和其随球心的平动。分析各曲线方程可知, $F(t)$ 中正一次谐波 $F_1(t)$ 对 $C(t)$ 、 $D(t)$ 和 $M(t)$ 的几何形状尺寸均无影响, 它对 $L(t)$ 的圆度误差也无影响。 $F(t)$ 中非正一次谐波则影响各曲线的几何形状尺寸, 影响 $L(t)$ 和 $M(t)$ 的圆度误差。

对于一个主轴系统(包括主轴、轴承、齿轮等), 它的几何形状尺寸、阻尼、刚度、负载、润滑、温度等条件是一定的, 所以它的运动规律是确定的, 当然描述主轴径向平面运动的 $C(t)$ 和 $D(t)$ 也是唯一确定的。由式(19)和(20)知, $C(t)$ 和 $D(t)$ 仅与 $F(t)$ 中非正一次谐波有关, 所以 $F(t)$ 中非正一次谐波都是主轴系统所固有的。因此, 调整标准球心位置, 仅改变 $F(t)$ 中正一次谐波, 而所有非正一次谐波则保持不变。既然正一次谐波不产生运动误差, 而它又是因标准球偏心引起的, 所以采用双向测量法不必消除标准球的偏心。

那么偏心距的物理意义是什么呢? 现在来分析回转中心和回转轴心。回转中心是 $C(t)$ 的中心 O_c 。由方程(19)知, $C(t)$ 是由 $F(t)$ 中所有非正一次谐波引起的静瞬心线(圆)而合成的。所以回转中心是这些瞬心线的中心的平均中心, 即回转中心 O_c 的坐标为:

$$\begin{cases} X_{O_c} = R_0 \cos \varphi_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \int_0^{2\pi} (1-K) R_k \cos(K\omega t + \varphi_k) dK\omega t = R_0 \cos \varphi_0 \\ Y_{O_c} = R_0 \sin \varphi_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \int_0^{2\pi} (1-K) R_k \sin(K\omega t + \varphi_k) dK\omega t = R_0 \sin \varphi_0 \end{cases}$$

可见回转中心 O_c 是 XO_1Y 上一个定点。可以证明 O_c 也是主轴回转平面上任意点(包括球心)运动轨迹——静轮转曲线的平均中心, 所以可以把 O_c 作为主轴径向平面运动的中心。

回转轴心是 $D(t)$ 的中心 O_D 。由方程(20)知, $D(t)$ 是由 $F(t)$ 中各非正一次谐波引起的动瞬心线(圆)而合成的。所以回转轴心是这些运瞬心线的中心的平均中心, 即回转轴心 O_D 的坐标为:

$$\begin{cases} u_{O_D} = -R_1 \cos \varphi_1 - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 1}}^{\infty} \int_0^{2\pi} K R_k \cos[(K-1)\omega t + \varphi_k] d(K-1)\omega t = -R_1 \cos \varphi_1 \\ v_{O_D} = -R_1 \sin \varphi_1 - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 1}}^{\infty} \int_0^{2\pi} K R_k \sin[(K-1)\omega t + \varphi_k] d(K-1)\omega t = -R_1 \sin \varphi_1 \end{cases}$$

可见回转轴心 O_D 是主轴回转平面上一个定点, 它在 UOV 上对应的常向量为 $-R_1 e^{j\varphi_1}$ 。

可以证明 O_D 也是静坐标系上任一点动轮转曲线的平均中心。回转轴心 O_D 到球心 O 的距离为 R_1 , 因此, 标准球的偏心距是指标准球心与回转轴心之间的距离。球心相对回转轴心的运动可用旋转向量 $R_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}$ 即正一次谐波来描述。

分析回转轴心 O_D 的运动轨迹, 由式(21)得:

$$L_{O_D}(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 1}}^{\infty} R_k e^{j(K\omega t + \varphi_k)}$$

可见 $L_{O_D}(t)$ 等于 $F(t)$ 滤去正一次谐波, 即 O_D 的运动为 $F(t)$ 的纯误差运动。

球心运动可以看作球心以 ω 绕 O_D 点转动, 同时随 O_D 平动, 即:

$$F(t) = L_{O_D}(t) + R_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}$$

方程(21)又可写成:

$$L(t) = (u_Q + jv_Q + R_1 e^{j\varphi_1}) e^{j\omega t} + L_{O_D}(t)$$

这表明主轴径向平面运动又可看作回转平面一边以角速度 ω 绕回转轴心 O_D 转动, 一边随 O_D 作纯误差平动。

3 结 语

3.1 标准球心径向误差运动 $F(t)$ 中的正一次谐波是标准球偏心引起的。所谓偏心距是指在主轴回转平面上球心到回转轴心的距离。调整标准球的位置仅改变正一次谐波, 而非正一次谐波保持不变。

3.2 回转中心是静瞬心线的平均中心, 也是主轴回转平面上任一点运动轨迹——静轮转曲线的平均中心。它是静坐标系上一个定点, 可以把它看作主轴径向平面运动的中心。

3.3 回转轴心是动瞬心线的平均中心, 也是静坐标系上任一点的动轮转曲线的平均中心。它是主轴回转平面上一个定点。它的运动为球心的纯误差运动, 即为 $F(t)$ 中各非正一次谐波的总和。

3.4 正一次谐波对静、动瞬心线和动轮转曲线的几何形状尺寸均无影响, 对静轮曲线的圆度误差也无影响。非正一次谐波影响各曲线的几何形状尺寸及轮转曲线的圆度误差。因此, 采用双向法测量主轴回转精度, 不必消除标准球的偏心。

3.5 标准球作一次谐振时, 仍存在偏心引起的正一次谐波, 调整球心位置, 使其仅作以负 ω 的转动, 即负一次谐波, 这时标准球才没有偏心。

参 考 文 献

(1) 蔡鹤皋. 回转运动误差的精确测试理论与方法. 机械工程学报. 24(2), 1988.6

(2) 黄仁贵. 平面回转误差运动的仿真分析. 郑州工学院学报. Vol.10, No.4, 1989

(下转第 113 页)

参 考 文 献

- (1) 梁友栋等译. 计算机图形学算法基础. 科学出版社, 1988
- (2) 金廷赞. 计算机图形学. 浙江大学出版社, 1988

The Display Technology on a Kind 3-Dimensional Graphic

Chen Yonghua

Liu Lianzhu

(Zhengzhou Institute of Technology)

(KunShan Administration for Industry and Commerce)

Abstract: In this paper, we discuss a display method on a kind of 3-dimensional graphic that is used in special system. Comparing with the general algorithm, it has obvious advantage in computing time, memory room and graphical display effect.

Keywords: 3-dimensional graphic, primitive, display

(上接第 109 页)

- (3) 黄仁贵. 回转误差运动一次谐波的几何分析. 中国计量测试学会几何量专业委员会1990年全国年会论文集
- (4) 芮晓健. 主轴轴心轨迹的转动传感器测量法. 计量技术. 1989年第一期

The Spindle Radial Plane Motion and the Eccentricity

Huang Rengui

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper further mathematical analysis on the spindle radial plane motion is made, the vectorial forms of various curve equations are derived which describe the characteristic of the motion, the equations are of extensive value, then kinematic analysis for the motion is made with the equations; it is expounded that the roundness error of machining has no concern with the plus primary harmonic of the radial error motion of the master sphere center, and is concerned with non-plus primary harmonic of it; the physical meaning of the eccentricity of the master sphere is defined.

Keywords: spindle, rotary error, eccentricity