第12卷 第1期 郑州工学院学报 Vol.12 No.1
1991年 3 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Mar. 1991

关于方阵A的特征多项式及其逆阵的求法问题*

钟宝东 张国政 高齐圣

(青岛化工学院)

摘 要：本文通过解非齐次线性方程组给出了求特征多项式系数的一般方法，从而解决了因含有参数而不易求得特征多项式一般形式的问题.
另外，利用哈密顿-凯莱定理，本文还给出了一个逆阵存在的判定定理和求逆阵的一个方法.

关键词：特征多项式，逆矩阵，计算方法

中国图书分类号：O151

1 特征多项式的待定系数法

我们知道，n 阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的特征多项式$f(\lambda)$就是要计算含有参数λ的 n 阶行列式$|\lambda E-A|$，其中 E 是与 A 同阶的单位阵，下同. 我们还知道，$f(\lambda)$的一般表达式是：

$$f(\lambda)=\lambda^n-C_{n-1}\lambda^{n-1}+C_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+C_1\lambda+C_0 \qquad (*)$$

其中，$C_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$为 A 的迹，$C_0=(-1)^n|A|$，而其余的 n−2 个系数$C_1$、$C_2$、…、$C_{n-2}$是待定系数. 实践说明，当方阵 A 的阶数大于 3 时，解行列式$|\lambda E-A|$，求特征多项式$f(\lambda)$的一般表达式是很困难的.

下面我们将给出一个方便可行的求特征多项式系数的方法，不妨称之为特征多项式的待定系数法，并给出下面定理.

定理 1 方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的特征多项(*)中的 n−2 个待定系数C_1、C_2、…、C_{n-2}，可由一个 n−2 元的非齐次线性方程组解出.

证明 任取 n−2 个互不相等的非零常数K_1，K_2，…，K_{n-2}，将它们依次代入特征多项式(*)，得方程组：

---

* 收稿日期：1990.08.20

$$\begin{cases} f(K_1)=K_1^n-(\sum_{i=1}^{n}a_{ii})K_1^{n-1}+K_1^{n-2}C_{n-2}+\cdots+K_1C_1+(-1)^n|A| \\ f(K_2)=K_2^n-(\sum_{i=1}^{n}a_{ii})K_2^{n-1}+K_2^{n-2}C_{n-2}+\cdots+K_2C_1+(-1)^n|A| \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ f(K_{n-2})=K_{n-2}^n-(\sum_{i=1}^{n}a_{ii})K_{n-2}^{n-1}+K_{n-2}^{n-2}C_{n-2}+\cdots+K_{n-2}C_i+(-1)^n|A| \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

其中$f(K_i)=|K_iE-A|$，$(i=1,2,\cdots,n-2)$是不含有参数的n阶行列式。

将(Ⅰ)式整理后，得同解方程组：

$$\begin{cases} K_1C_1+K_1^2C_2+\cdots\cdots+K_1^{n-2}C_{n-2}=b_1 \\ K_2C_1+K_2^2C_2+\cdots\cdots+K_2^{n-2}C_{n-2}=b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ K_{n-2}C_1+K_{n-2}^2C_2+\cdots\cdots+K_{n-2}^{n-2}C_{n-2}=b_{n-2} \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

其中：$b_i=f(K_i)-K_i^n+(\sum_{i=1}^{n}a_{ii})K_i^{n-1}+(-1)^{n+1}|A|$，$(i=1,2,\cdots,n-2)$。

显然方程组(Ⅱ)是一个$n-2$元的非齐次线性方程组，其系数行列式是：

$$\triangle=\begin{vmatrix} K_1 & K_1^2 & \cdots & K_1^{n-2} \\ K_2 & K_2^2 & \cdots & K_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n-2} & K_{n-2}^2 & \cdots & K_{n-2}^{n-2} \end{vmatrix}$$

易知$\triangle=\prod_{i=1}^{n-2}K_i\prod_{1\le j<i\le n-2}(K_i-K_j)\neq 0$，由克莱姆法则方程组(2)有唯一解：

$$C_i=\frac{\triangle_i}{\triangle}\quad(i=1,2,\cdots,n-2)$$

其中$\triangle_i$是把$\triangle$中的第i列的元素换成常数项后得到的行列式，即：

$$\triangle_i=\begin{vmatrix} K_1 & \cdots & K_1^{i-1} & b_1 & K_1^{i+1} & \cdots & K_1^{n-2} \\ K_2 & \cdots & K_2^{i-1} & b_2 & K_2^{i+1} & \cdots & K_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ K_{n-2} & \cdots & K_{n-2}^{i-1} & b_{n-2} & K_{n-2}^{i+1} & \cdots & K_{n-2}^{n-2} \end{vmatrix}$$

将求出的C_1、C_2、…、C_n代入特征多项式(＊)，即得n阶方阵A的特征多项式的一般表达式。

从上面的论证中可以看出，所谓的特征多项式的待定系数法，实际上就是采用了普通的解线性方程组的方法。实践表明，这是一个行之有效的方法。为说明问题，举例如下：

例：已知$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\-1&2&0&1\\1&1&-1&3\\0&1&1&2\end{bmatrix}$

试用待定系数法求A的特征多项式$f(\lambda)$.

解：$\because n=4$且$|A|=2$，$\sum_{i=1}^{4}a_{ii}=4$

$\therefore$设$f(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+C_2\lambda^2+C_1\lambda+2$

令$\lambda=1$和$\lambda=-1$分别代入上式两端，整理后得方程组：

$$\begin{cases}f(1)=C_2+C_1-1\\f(-1)=C_2-C_1+7\end{cases}\tag{1}$$

又 $$f(1)=|E-A|=\begin{vmatrix}0&0&1&-2\\1&-1&0&-1\\-1&-1&2&3\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}=6,$$

$$f(-1)=|-E-A|=\begin{vmatrix}-2&0&1&2\\1&-3&0&-1\\-1&-1&0&-3\\0&-1&-1&-3\end{vmatrix}=0,$$

代入（1）并整理得：$$\begin{cases}C_1+C_2=7\\-C_1+C_2=-7\end{cases}\tag{2}$$

解(2)得：$C_1=7$，$C_2=0$代入所设特征多项式，即得：

$$f(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+7\lambda+2$$

2 求逆阵的特征多项式法

通常求逆阵大都采用两种方法，一是伴随阵法，一是初等行变换法．这两种方法同是建立在一个逆阵存在定理的基础之上的，即：

定理 方阵A可逆的充分必要条件是方阵A的行列式不为零，即$|A|\neq0$。

通过前面对方阵A的特征多项式的讨论，我们又很容易地给出了与此定理有等价关系的逆阵存在的定理2如下：

定理2 方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$可逆的充分必要条件是方阵A的特征多项式(＊)中的常数项不为零，即$C_0\neq0$。

证明 必要性：由于$C_0=(-1)^n|A|$，所以必要性不证自明；

充分性：设(＊)式中$C_0\neq0$，则由哈密顿－凯莱定理，将A代入(＊)有

f(A)=0，即得:

$$A^n - C_{n-1}A^{n-1} + C_{n-2}A^{n-2} + \cdots\cdots + C_1A + C_0E = 0 \qquad (**)$$

由于$C_0 \neq 0$，故将(＊＊)式移项并整理可得:

$$A \cdot [-\frac{1}{C_0}(A^{n-1} - C_{n-1}A^{n-2} + C_{n-2}A^{n-3} + \cdots\cdots + C_2A + C_1E)] = 0$$

由逆阵定义，立得:

$$A^{-1} = -\frac{1}{C_0}(A^{n-1} - C_{n-1}A^{n-2} + C_{n-2}A^{n-3} + \cdots\cdots + C_2A + C_1E)$$

证讫。

3 算法框图

利用 1、2 所述方阵 A 特征多项式和逆阵的求法，我们编出了求方阵 A 的特征多项式 f(λ)和 A^{-1} 的 True Basic 程序，在 IBM−PC 机上验证算法的正确性。程序框图如图 1、2 所示。

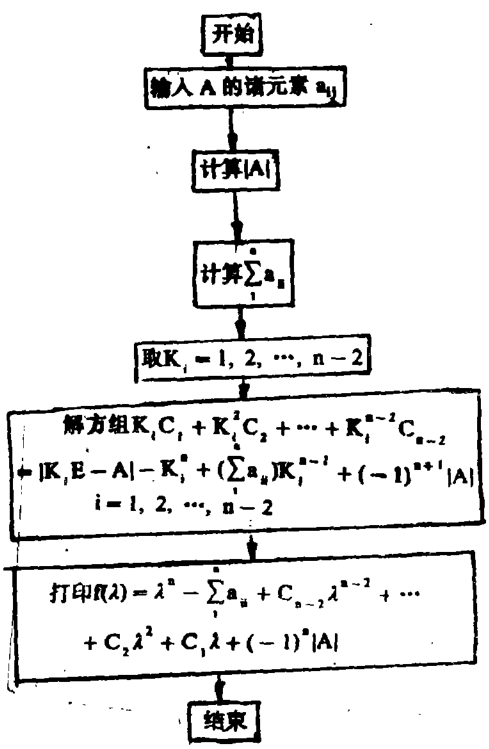

图 1　求特征多项式框图

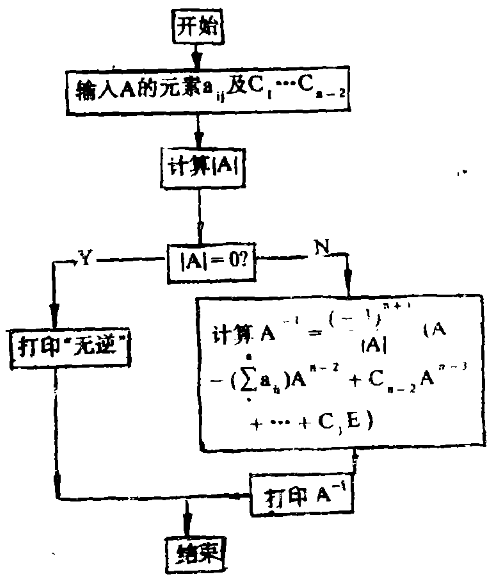

图 2　求 A^{-1} 框图

例: 求 6 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 54 & 7 \\ 8 & 9 & 9 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_1=-33081 \quad C_2=15647 \quad C_3=4067 \quad C_4=-592$

运行结果：$F(\lambda)=\lambda^6-24\lambda^5-592\lambda^4+4067\lambda^3+15647\lambda^2-33081\lambda-27135$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -1.57612 & -3.28358e-2 & 0.304478 & 0.271973 & -0.144942 & 0.177446 \\ 1.4806 & 3.08458e-2 & -0.255721 & -0.32283 & 0.250636 & -0.183527 \\ 0.146269 & 2.38806e-2 & 0.414925 & 5.47264e-2 & -0.157214 & -0.482587 \\ -0.244776 & -4.67662e-2 & -0.354229 & 2.70868e-2 & 3.93588e-2 & 0.579326 \\ 2.98507e-3 & 2.08955e-2 & -1.19403e-2 & -2.15589e-2 & 1.3267e-3 & 8.29187e-3 \\ -9.55224e-2 & -1.99005e-3 & 4.87562e-2 & 0.171365 & -5.41736e-3 & -0.117192 \end{bmatrix}$$

上述算法，尤其对高阶矩阵的情形的处理很容易在计算机上实现。所以应当说这是一种实用、方便的方法。

参 考 文 献

〔1〕S.LIPSCHUTZ著．沐定夷，徐克绍译． 线性代数的理论和习题． 上海科学技术出版社，1981.11

〔2〕[苏联] Д・K法捷耶夫，B・H法捷耶娃著．刘光武，殷国华，苏锦祥译． 线性代数计算方法． 上海科学技术出版社，1965.9

〔3〕王湘浩，谢邦杰主编． 高等代数． 人民教育出版社，1962.4

〔4〕王萼芳． 高等代数． 上海科学技术出版社，1981.7

On Working-Out of Characteristic Polynomial of Matrix a as Well as its Inverse Matrix

Zhong Baodong Zhang Guozheng Gao Qisheng
(Qingdao Insttitute of Chemical Technology)

Abstract: A common method to work out the coefficient of characteristic polynomial is given by means of an inhomogeneous linear equation system so as to solve the problem of the common expression whose characteristic polymomial is diffcult to obtain because of the existence of a variable. In addition, a decision theorem of the existence of the inverse matrix and a method for its determination are given by using the Hamilton-Caylay Theorem.

Keywords: characteristic polynolial, inverse matrix, computational method.