第11卷 第4期 郑州工学院学报 Vol.11 No.4
1990年 12 月 Journal of ZhengZhou Institute of Technology Dec. 1990

一类非线性拟双曲型方程组的初边值问题*

李海峰 杨志坚

(郑州纺织工学院) (郑州工学院)

摘 要: 本文用先验估计方法及 Leary-Schauder 不动点原理讨论了一类非线性拟双曲型方程组初边值问题广义解的存在唯一性.

关键词: 非线性, 拟双曲组, 初边值问题

在物理、力学、生物等现象的研究中会出现各种类型的拟双曲型方程组. 例如, 文[1]研究了如下非线性拟双曲型方程组:

$$Lu \equiv u_{tt} + (-1)^M A(t) u_{x^{2M}} + (-1)^M B u_{x^{2M}t} + \sum_{j=0}^{M} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} (F_j(u, \cdots, u_{x^{M-1}}) u_{x^j t})$$

$$+ \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\frac{\partial}{\partial p_k} F(u, \cdots, u_{x^{M-1}})\right)\right) = f(x, t) \tag{1}$$

其中 $M>1$ 为整数, u 与 f 为 N 维矢量值函数, 并得到了其周期边界问题、初值问题及第一边值问题解的存在唯一性.

本文在矩形域 $Q_T = [-l, l] \times [0, T]$ 上考察一类对空间变量为四阶的非线性拟双曲型方程组:

$$Lu \equiv u_{tt} + \sum_{k=1}^{2} (-1)^k A_k(x, t) u_{x^{2k}} + \sum_{k=1}^{2} (-1)^k B_k(t) u_{x^{2k} t} + \sum_{j=0}^{1} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j}$$

$$(F_j(u, u_x) u_{x^j t}) + \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} F(u, u_x)\right)\right) - g(u) = f(x, t) \cdot \tag{2}$$

其中 $u = (u_1, \cdots, u_N)$ 与 $f = (f_1, \cdots, f_N)$ 为 N 维矢量值函数, $A_1(x, t)$、$B_1(t)$ 是 $N \times N$ 矩阵, $A_2(x, t)$、$B_2(t)$ 是 $N \times N$ 对称矩阵, g(u) 为 u 的连续可微函数, 满足条件:

$$(g(u), g(u)) \leqslant a_1 (u, u) + b_1 \tag{3}$$

其中: $(u, u) = \int_{-l}^{l} u^2 dx$, 而 a_1 与 b_1 为常数, $F(u, u_x)$ 和 $F_j(u, u_x)$ ($j = 0, 1$) 为矢量变量 u、u_x 的函数, 记 $P_i = u_{x^i}$ ($i = 0, 1$).

---

* 收稿日期: 1988.06.02

假定方程组(2)还满足下列条件：

$$\begin{cases}\text{i) } A_2(x,t)\text{下有界，即}(A_2(x,t)\xi,\xi)\geqslant -a_2(\xi,\xi),\ \forall\xi\in R^N,\ (x,t)\in Q_T,\\ \quad a_2\geqslant 0;\ A_1(x,t),\ A_2(x,0),\ A_{2x},\ A_{2t},\ A_{2x^2}\text{为有界可测矩阵};\\ \text{ii) } B_2(t)\text{为正定矩阵，即}(B_2(t)\xi,\xi)\geqslant b_2(\xi,\xi),\ \forall\xi\in R^N,\\ \quad t\in[0,T],\ b_2>0,\ B_1(t)\text{为有界可测矩阵};\\ \text{iii) } F(u,u_x)\text{和}F_j(u,u_x)\ (j=0,1)\text{为非负函数，}\forall(u,u_x)\in R^{2N},\\ \quad F(u,u_x)\text{关于所有变元三次连续可微，}F_j(u,u_x)\text{关于所有变元二}\\ \quad\text{次连续可微，并有}F(0,0)=F_j(0,0)=0,\ j=0,1;\\ \text{iv) } f\in L_2(Q_T)\end{cases}\tag{4}$$

对方程组(2)考虑初边值问题：

$$\begin{cases}u(-l,t)=u(l,t)=0,\\ u_{x^2}(-l,t)=u_{x^2}(l,t)=0,\quad t\in[0,T],\\ u(x,0)=\varphi(x),\\ u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in[-l,l]\end{cases}\tag{5}$$

对方程组(2)的初边值问题(5)，我们将证明在函数空间

$$Z\equiv W^1_\infty(W^2_2[-l,l];[0,T])\bigcap W^1_2(W^4_2[-l,l];[0,T])$$
$$\bigcap L_\infty(W^4_2[-l,l];[0,T])$$

中整体广义解的存在唯一性。

引进符号$(u,v)=\int_{-l}^{l}uv\,dx$，$|u|^2=|u(\cdot,t)|^2_{L_2[-l,l]}$以及$[u,v]=\int_0^t(u,v)dt$

1　线性方程组问题

考察下面的线性方程组：

$$Lu\equiv u_{tt}+\sum_{k=0}^{4}(-1)^kA_k(x,t)u_{x^{4-k}}+B_0(x,t)u_{x^4t}+\sum_{m=2}^{4}(-1)^mB_m(x,t)u_{x^{4-m}t}$$
$$=f(x,t)\tag{6}$$

其中$u=(u_1,\cdots,u_N)$和$f=(f_1,\cdots,f_N)$是N维矢量值函数，$A_k(x,t)$ ($k=0,1,2,3,4$) 和$B_0(x,t)$，$B_m(x,t)$ ($m=2,3,4$) 都是$N\times N$矩阵。

假定方程组(6)满足如下条件：

$$
\begin{cases}
\text{i) } A_0(x,t)\text{是对称下有界矩阵：} (A_0(x,t)\xi,\xi) \geqslant -a_0(\xi,\xi),\ \forall\xi\in R^N, \\
\quad a_0\geqslant 0;\ (x,t)\in Q_T,\ A_0(x,0),\ A_{0t},\ A_k\ (k=1,2,3,4)\ \text{都是有界可测矩阵；} \\
\text{ii) } B_0(x,t)\text{是对称正定矩阵；} \\
\quad (B_0(x,t)\xi,\xi)\geqslant b_0(\xi,\xi),\ \forall\xi\in R^N,\ (x,t)\in Q_T,\ b_0>0, \\
\quad B_m\ (m=2,3,4)\ \text{为有界可测矩阵；} \\
\text{iii) } f\in L_2(Q_T),\ \varphi\in W_2^4[-l,l],\ \psi\in W_2^2[-l,l] \\
\quad \varphi\text{和}\psi\text{及其二阶导数在区间}[-l,l]\text{的端点处为零。}
\end{cases} \tag{7}
$$

引理 1：设 $u(x,t)$ 为方程组(2)或(6)的满足边值条件(5)的解，则成立下面的不等式：

$$
\|u_{x^{k-1}}\|^2_{L_2(Q_t)} \leqslant C\|u_{x^k}\|^2_{L_2(Q_t)}, \qquad \|u_{x^{k-1}t}\|^2_{L_2(Q_t)} \leqslant C\|u_{x^k t}\|^2_{L_2(Q_t)}\| \tag{8}
$$

$$
(k=1,2,3,4)
$$

证：利用 Rolle 定理，仿 Poincare 不等式的证法可得引理结论。

定理 1：假设条件(7)满足，那么对线性拟双曲型方程组(6)的初边值问题(5)式有唯一的整体广义解 $u(x,t)\in Z$。

证：以矢量 u_{x^4t} 和方程组(7)作标量积，然后在 Q_t 上积分 $[Lu,u_{x^4t}]$，分部积分后得：

$$
\frac{1}{2}(u_{x^2t},u_{x^2t})+\frac{1}{2}(A_0u_{x^4},u_{x^4})+[B_0u_{x^4t},u_{x^4t}]
$$

$$
=[f,u_{x^4t}]+\frac{1}{2}(\psi^{(2)},\psi^{(2)})+\frac{1}{2}(A_0(x,0)\varphi^{(4)},\varphi^{(4)})+\frac{1}{2}[A_{0t}u_{x^4},u_{x^4}]
$$

$$
-[\sum_{k=1}^{4}(-1)^kA_ku_{x^{4-k}}+\sum_{m=2}^{4}(-1)^mB_mu_{x^{4-m}t},u_{x^4t}] \tag{9}
$$

等式两边同时加上一项：$(1+a_0)[u_{x^4},u_{x^4t}]$

在左边将它化为：$\frac{1+a_0}{2}(u_{x^4},u_{x^4})-\frac{1+a_0}{2}(\varphi^{(4)},\varphi^{(4)})$

用它盖住 $\frac{1}{2}(A_0u_{x^4},u_{x^4})$，在右边将它估为：

$$
(1+a_0)[u_{x^4},u_{x^4t}]\leqslant\frac{b_0}{4}[u_{x^4t},u_{x^4t}]+C(a_0,b_0)[u_{x^4},u_{x^4}] \tag{10}
$$

等式(9)右边第一、第五项根据引理1可估为：

$$
\frac{b_0}{4}[u_{x^4t},u_{x^4t}]+C(b_0)\{\|f\|^2_{L_2(Q_T)}+[u_{x^4},u_{x^4}]+[u_{x^2t},u_{x^2t}]\} \tag{11}
$$

于是，由(9)式应用Gronwall不等式就能得到估计式：

$$
|u_t(\cdot,t)|^2_{W_2^2[-l,l]}+|u(\cdot,t)|^2_{W_2^4[-l,l]}+\|u_{x^4t}\|^2_{L_2(Q_t)}
$$

$$
\leqslant C(a_0,b_0)\{\|f\|^2_{L_2(Q_T)}+|\varphi|^2_{W_2^4[-l,l]}+|\psi|^2_{W_2^2[-l,l]} \tag{12}
$$

由此估计式即可利用参数延拓法证明问题(6)和(5)式在函数空间 Z 中有广义解存在，又因为问题是线性的，因此解的唯一性亦可直接由估计式导出，定理证毕。

2 非线性方程组的初边值问题

考虑非线性拟双曲型方程组(2)的初边值问题(5)式，除假定(3)、(4)式之外，还假定：

$$\begin{cases} \text{i) } F(\varphi(x),\ \varphi'(x))\in L_1[-l,\ l] \\ \text{ii) } \varphi(x)\in W_2^4[-l,\ l],\quad \psi(x)\in W_2^2[-l,\ l] \end{cases} \tag{13}$$

它们及其二阶微商在$[-l,\ l]$的端点上为零。

引理2：若满足条件(3)，(4)和(13)式，则问题(2)和(5)的解满足不等式：

$$\begin{aligned} &|u_t(\cdot,\ t)|^2_{L_2[-l,\ l]}+|u(\cdot,\ t)|^2_{W_2^2[-l,\ l]}+\|u_{x^2t}\|^2_{L_2(Q_T)}+|F(u(\cdot,\ t),\ u_x(\cdot,\ t))|_{L_1[-l,\ l]} \\ &\leqslant C\{\|f\|^2_{L_2(Q_T)}+|\varphi|^2_{W_2^2[-l,\ l]}+|\psi|^2_{L_2[-l,\ l]} \\ &+|F(\varphi,\ \varphi')|_{L_1[-l,\ l]}+M\},\quad \forall t\in[0,\ T] \end{aligned} \tag{14}$$

常数C依赖于a_1，b_1，a_2，b_2及矩阵$A_2(x,\ 0)$，$A_{2t}(x,\ 0)$，$A_{2x}(x,\ t)$，$A_{2x^2}(x,\ t)$的界。

证：以u_t与方程组(2)作标量积，然后在Q_t $(0\leqslant t\leqslant T)$上积分，利用边界条件(5)，经分部积分后得：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(u_t,\ u_t)+\frac{1}{2}(A_2(x,\ t)u_{x^2},\ u_{x^2})+[B_2(t)u_{x^2t},\ u_{x^2t}]+\sum_{i=0}^{1}[F_ju_{x^it},\ u_{x^it}] \\ &+\int_{-l}^{l}F(u,\ u_x)dx=[f,\ u_t]+\frac{1}{2}(\psi,\ \psi)+\frac{1}{2}(A_2(x,\ 0)\varphi'',\ \varphi'')+\frac{1}{2}[A_{2t}u_{x^2},\ u_{x^2}] \\ &-[2A_{2x}u_{xt}+A_{2x^2}u_t,\ u_{x^2}]+\int_{-l}^{l}F(\varphi,\ \varphi')dx+[A_1u_{x^2},\ u_t]+[B_1(t)u_{x^2t},\ u_t] \\ &+[g(u),\ u_t] \end{aligned} \tag{15}$$

因矩阵$A_2(x,\ t)$下有界，在等式(15)的两边同时加上一项$(1+a_2)[u_{x^2},\ u_{x^2t}]$，

然后在等式左边将它化为：$\dfrac{1+a_2}{2}(u_{x^2},\ u_{x^2})-\dfrac{1+a_2}{2}(\varphi'',\ \varphi'')$，

可用它盖住$\frac{1}{2}(A_2u_{x^2},\ u_{x^2})$这一项。在等式右边将它估为：

$$(1+a_2)[u_{x^2},\ u_{x^2t}]\leqslant\frac{b_2}{8}[u_{x^2t},\ u_{x^2t}]+C(a_2,\ b_2)[u_{x^2},\ u_{x^2}] \tag{16}$$

等式(15)右边的第一、第四和第五项可分别估为：

$$|[f,\ u_t]|\leqslant[f,\ f]+[u_t,\ u_t],\quad |[A_{2t}u_{x^2},\ u_{x^2}]|\leqslant C[u_{x^2},\ u_{x^2}],$$

$$|[2A_{2x}u_{xt}+A_{2x^2}u_t,\ u_{x^2}|\leqslant D\{[u_{x^2},\ u_{x^2}]+[u_t,\ u_t]\}+\frac{b_2}{8}[u_{x^2t},\ u_{x^2t}] \tag{17}$$

右边第七、第八项由引理1及Cauchy不等式可估为：

$$|[A_1u_{x^2},\ u_t]+[B_1(t)u_{x^2t},\ u_t]|\leqslant E\{[u_{x^2},\ u_{x^2}]+[u_t,\ u_t]\}+\frac{b_2}{8}[u_{x^2t},\ u_{x^2t}] \tag{18}$$

由g(u)满足的条件(3)，等式(15)右边第九项可估为:

$$\|[g(u),\ u_t]\| \leqslant [u_t,\ u_t] + \tilde{a}_1[u_{x^2},\ u_{x^2}] + b_1 \tag{19}$$

由假定(4)式，等式(15)左边第三项为正，第四、第五项为非负。

因此，若令$W(t) \equiv (u_t,\ u_t) + (u_{x^2},\ u_{x^2}) + [u_{x^2t},\ u_{x^2t}]$，

则由(15)式应用Gronwall不等式立即可导出(14)式。

由Sobolev嵌入定理可得:

推论1: 问题(2)和(5)式的任一解有估计:

$$u(x,\ t) \in L_\infty(Q_T),\quad u_x(x,\ t) \in L_\infty(Q_T) \tag{20}$$

引理3[2]: 设$G(z_1,\ \cdots,\ z_g)$是g个矢量$z_1(x,\ t),\ \cdots,\ z_g(x,\ t)$的函数，对各变量$K(\geqslant 1)$次连续可微。设$z_i(x,\ t) \in L_\infty([0,\ T];\ W_2^K[-l,\ l])$ $(i=1,\ \cdots,\ g)$ 且令:

$\overline{M} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant g}\ \max\limits_{(x,\ t)\in Q_T}|z_i(x,\ t)|$，于是有不等式:

$$\left|\frac{\partial^K}{\partial X^K}G(z_1(\cdot,\ t),\ \cdots,\ z_g(\cdot,\ t))\right|^2_{L_2[-l,\ l]} \leqslant C(\overline{M},\ K,\ g)\sum_{i=1}^{g}|z_i(\cdot,\ t)|^2_{W_2^K[-l,\ l]} \tag{21}$$

引理4: 在假定(3)，(4)与(13)之下，问题(2)和(5)式的解满足估计式:

$$|u_t(\cdot,\ t)|_{W_2^2[-l,\ l]} + |u(\cdot,\ t)|_{W_2^4[-l,\ l]} + \|u_{x^2t}\|_{L_2(Q_t)}$$

$$\leqslant C(a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ d_1)\{\|f\|_{L_2(Q_T)} + |\varphi|_{W_2^4[-l,\ l]} + |\psi|_{W_2^2[-l,\ l]} + M_1\} \tag{22}$$

证: 作积分$[Lu,\ u_{x^4t}]$，可得:

$$\frac{1}{2}(u_{x^2t},\ u_{x^2t}) + \frac{1}{2}(A_2(x,\ t)u_{x^4},\ u_{x^4}) + [B_2(t)u_{x^4t},\ u_{x^4t}]$$

$$+\left[\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial X^j}(F_j(u,\ u_x)u_{x^jt}),\ u_{x^4t}\right]$$

$$=[f,\ u_{x^4t}] + \frac{1}{2}(\psi'',\ \psi'') + \frac{1}{2}(A_2(x,\ 0)\varphi^{(4)},\ \varphi^{(4)}) + \frac{1}{2}[A_{2t}u_{x^4},\ u_{x^4}] + [g(u),\ u_{x^4t}]$$

$$+[A_1u_{x^2} + B_1u_{x^2t},\ u_{x^4t}] - \left[\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\left(\frac{\partial^i}{\partial X^i}\left(\frac{\partial}{\partial P_i}F(u,\ u_x)\right),\ u_{x^4t}\right)\right] \tag{23}$$

因为: $\left[\sum\limits_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial X^j}[F_j(u,\ u_x)u_{x^jt}),\ u_{x^4t}\right] = \sum\limits_{j=0}^{1}\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2}(F_j(u,\ u_x)u_{x^jt}),\ u_{x^{2+j}t}\right]$

$$=\sum_{j=0}^{1}[F_j(u,\ u_x)u_{x^{2+j}t},\ u_{x^{2+j}t}] + \sum_{j=0}^{1}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial X}F_j(u,\ u_x)\cdot u_{x^{1+j}t},\ u_{x^{2+j}t}\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial}{\partial X}F_j(u,\ u_x)\cdot u_{x^jt},\ u_{x^{1+j}t}\right]\right\} \tag{24}$$

而: $\left|\left[\frac{\partial}{\partial X}F_j(u,\ u_x)u_{x^{1+j}t},\ u_{x^{2+j}t}\right]\right| \leqslant \int_0^t \sup\limits_{-l\leqslant x\leqslant l}|u_{x^{1+j}t}|\left|\frac{\partial}{\partial X}F_j(u,\ u_x)\right|_{L_2[-l,\ l]}|u_{x^{2+j}t}|_{L_2[-l,\ l]}dt$

由Gagliardo－Nirenberg不等式[3]知：

$$\sup_{-l\le x\le l}|u_{x^{j}t}|\le C|u_{x^{j}t}|^{\frac{1}{2}}_{L_2[-l,l]}|u_{x^{j+1}t}|^{\frac{1}{2}}_{L_2[-l,l]}$$

又由引理3知：$|\frac{\partial}{\partial X}F_j(u,u_x)|_{L_2[-l,l]}\le C|u|_{W_2^2[-l,l]}$

故利用Young不等式及引理2可得：

$$|[\frac{\partial}{\partial X}F_j(u,u_x)u_{x^{1+j}t},u_{x^{2+j}t}]|\le C\int_0^t|u_{x^{j+1}t}|^{\frac{1}{2}}_{L_2}|u_{x^{j+2}t}|^{\frac{1}{2}}_{L_2}|u|_{W_2^2}|u_{x^{2+j}t}|_{L_2}dt$$

$$\le C\sup_{0\le t\le T}|u(\cdot,t)|_{W_2^2[-l,l]}\int_0^t|u_{x^{j+1}t}|^{\frac{1}{2}}_{L_2[-l,l]}|u_{x^{2+j}t}|^{\frac{3}{2}}_{L_2[-l,l]}dt$$

$$\le C\sup_{0\le t\le T}|u(\cdot,t)|_{W_2^2[-l,l]}\int_0^t(\varepsilon|u_{x^{2+j}t}|^2_{L_2}+C(\varepsilon)|u_{x^{1+j}t}|^2_{L_2})dt$$

$$\le C_1\int_0^t(\varepsilon|u_{x^4t}|^2_{L_2[-l,l]}+C(\varepsilon)|u_{x^2t}|^2_{L_2[-l,l]})dt,\quad j=0,1 \tag{25}$$

同样地，有：

$$|[\frac{\partial}{\partial X}F_j(u,u_x)u_{x^jt},u_{x^{3+j}t}]|\le\int_0^t\sup_{-l\le x\le l}|u_{x^jt}||\frac{\partial}{\partial X}F_j(u,u_x)|_{L_2}|u_{x^{3+j}t}|_{L_2}dt$$

$$\le C\int_0^t|u_{x^jt}|^{\frac{1}{2}}_{L_2}|u_{x^{j+1}t}|^{\frac{1}{2}}_{L_2}|u|_{W_2^2}|u_{x^{3+j}t}|_{L_2}dt$$

$$\le C\sup_{0\le t\le T}|u|_{W_2^2[-l,l]}\int_0^t(\varepsilon)[|u_{x^{3+j}t}|^2_{L_2}+C(\varepsilon)|u_{x^jt}|^2+|u_{x^{j+1}t}|^2])dt$$

$$\le C_1\int_0^t(\varepsilon|u_{x^4t}|^2_{L_2[-l,l]}+C(\varepsilon)|u_{x^2t}|^2_{L_2[-l,l]})dt,\quad j=0,1 \tag{26}$$

取ε使$C_1\varepsilon<\frac{b_2}{16}$，即有：

$$\sum_{j=0}^{1}\{|[\frac{\partial}{\partial X}F_j(u,u_x)u_{x^{1+j}},u_{x^{2+j}t}]|+|[\frac{\partial}{\partial X}F_j(u,u_x)u_{x^jt},u_{x^{3+j}t}]|\}$$

$$\le\frac{b_2}{4}[u_{x^4t},u_{x^4t}]+C_2\int_0^t|u_{x^2t}|^2_{W_2^2[-l,l]}dt \tag{27}$$

对(23)式右端的最后一项应用引理3可得：

$$|[\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial X^j}(\frac{\partial}{\partial P_j}F(u,u_x)),u_{x^4t}]|\le\frac{b_2}{16}[u_{x^4t},u_{x^4t}]+C(b_2)\sum_{j=0}^{1}\int_0^t|\frac{\partial^j}{\partial X^j}(\frac{\partial}{\partial P_j}F)|^2_{L_2}dt$$

$$\le\frac{b_2}{16}[u_{x^4t},u_{x^4t}]+C_3\int_0^t|u(\cdot,t)|^2_{W_2^2[-l,l]}dt+C_4\le\frac{b_2}{16}[u_{x^4t},u_{x^4t}]+C_5 \tag{28}$$

将(24)，(27)，(28)代入(23)并在等式(23)两端同时加上一项$(1+a_2)[u_{x^4},u_{x^4t}]$，然后用前面的估计方法，最后可导出不等式：

$$|u_t(\cdot,t)|^2_{W_2^2[-l,l]}+|u(\cdot,t)|^2_{W_2^4[-l,l]}+\|u_{x^4t}\|^2_{L_2(Q_t)}$$

$$\leqslant C_1(a_1, b_1, a_2, b_2, d_1)\{\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + |\varphi|^2_{W_2^4[-l, l]} + |\psi|^2_{W_2^2[-l, l]}$$

$$+ \|u_t\|^2_{L_2(W_2^2[-l, l]; [0, T])} + \|u\|^2_{L_2(W_2^4[-l, l]; [0, T])} + M_1\} \tag{29}$$

应用Gronwall不等式立即可导出(22)式。

有了估计(14)和(22)式，再由方程组(2)即可导出：$u_{tt}(x, t) \in L_2(Q_T)$ (30)

定理2：假设条件(3)，(4)与(13)式满足，则问题(2)和(5)式存在整体广义解$u(x, t) \in Z$。

证：取函数空间：

$$G \equiv L_\infty(W_2^1[-l, l]; [0, T]) \cap L_2(W_2^3[-l, l]; [0, T]) \cap L_\infty(W_2^3[-l, l]; [0, T])$$

作为基空间，运用Leray－Schauder不动点原理来处理。

对每个$v \in G$，构造一个N维矢量值函数u，它是下面的带有参数λ（$0<\lambda<1$）的线性拟双曲型方程组：

$$u_{tt} + \sum_{k=1}^{2}(-1)^k A_k(x, t)u_{x^{2k}} + B_k(t)u_{x^{2k}t}] + \lambda\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial X^j}(F_j(v, v_x)u_{x^jt})$$

$$= f(x, t) - \lambda[\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\frac{\partial^i}{\partial X^i}(\frac{\partial}{\partial P_i}F(v, v_x)) - g(v)] = \tilde{f}(x, t) \tag{31}$$

在边界条件(5)之下的广义解，由于定理1的条件显然对(31)式全部满足，故$u(x, t)$被唯一地确定且$u \in Z$。

v和u的对应定义了一个$G \to G$的函数映射T_λ，这里$0<\lambda<1$是一参数。对$\forall v \in G$，象$T_\lambda v \in Z \hookrightarrow G$，且由定理1知，当$\|v\|_G < M$时，$\|T_\lambda v\|_Z < M$。因为嵌入映射$Z \hookrightarrow G$是紧的，故我们只要证明，对任意给定的$\lambda$（$0<\lambda<1$），$T_\lambda$关于v是连续的，则映射$T_\lambda$：$G \to Z \hookrightarrow G$是完全连续的。

事实上，设$u_1 = T_\lambda v_1$，$u_2 = T_\lambda v_2$，记$u = u_1 - u_2$，则有：

$$u_{tt} + \sum_{k=1}^{2}(-1)^k[A_k(x, t)u_{x^{2k}} + B_k(t)u_{x^{2k}t}] + \lambda\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial X^j}$$

$$[F_j(v_1, v_{1x})u_{1x^jt}) - F_j(v_2, v_{2t})u_{2x^jt}]$$

$$= -\lambda\{\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\frac{\partial^i}{\partial X^i}(\frac{\partial}{\partial P_i}[F(v_1, v_{1x}) - F(v_2, v_{2x})] - [g(v_1) - g(v_2)]\} \tag{32}$$

根据微分中值定理，有：

$$u_{tt} + \sum_{k=1}^{2}(-1)^k[A_k(x, t)u_{x^{2k}} + B_k(t)u_{x^{2k}t}] + \lambda\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial X^j}[F_j(v_1, v_{1x})u_{x^jt})$$

$$= -\lambda\{\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial X^j}(\tilde{F}_{jp_0}\cdot(v_1 - v_2) + \tilde{F}_{jp_1}\cdot(v_1 - v_2)_x]u_{2x^jt}$$

$$-\lambda\{\sum_{i=0}^{1}[\frac{\partial^i}{\partial P_i}(\tilde{F}_{p_0}\cdot(v_1 - v_2) + \tilde{F}_{p_1}\cdot(v_1 - v_2)_x] - \tilde{g}'\cdot(v_1 - v_2)\} \equiv \tilde{f}(x, t) \tag{33}$$

其中“～”表示函数取中值。

又因为: $$\begin{cases} u(-l,\ t)=u(l,\ t)=0,\ u_{x^2}(-l,\ t)=u_{x^2}(l,\ t)=0 \\ u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=0 \end{cases} \tag{34}$$

因而由定理1得到: $\|u\|_G \leqslant C(\|\tilde{f}\|_{L_2(Q_T)}) \to 0$, 当$\|v_1-v_2\|_G \to 0$

并可验证, 对G的任一有界子集m, 映射T_λ: m→G对λ (0<λ<1) 是一致连续的。

当λ=0时, 由定理1知对∀v∈G, $T_0 v=u_0$存在唯一的不动矢量u_0。

现在考虑具有参数λ (0<λ<1) 的非线性拟双曲组:

$$u_{tt}+\sum_{k=1}^{2}(-1)^k[A_k(x,\ t)u_{x^{2k}}+B_k(t)u_{x^{2k}t}]+\lambda\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial X^j}[F_j(u,\ u_x)u_{x^j t})$$
$$=f(x,\ t)-\lambda\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\frac{\partial^i}{\partial X^i}(\frac{\partial}{\partial P_i}F(u,\ u_x))+\lambda g(u) \tag{35}$$

由引理2与引理4的估计式(14), (20), (22), (30)式, 问题(2)和(5)式的所有可能解在空间G中对0<λ<1是一致有界的。

于是, 根据Leray-Schauder不动点原理, 对λ∈[0, 1], 映射T_λ至少存在一个不动点。特殊地, 当λ=1时亦即问题(2)和(5)式至少存在一个整体广义解u∈Z。

定理3: 问题(2)和(5)式的整体广义解是唯一的。

证: 假设问题(2)和(5)有两个广义解u和v, 于是w=u−v满足下面的方程组:

$$w_{tt}+\sum_{k=1}^{2}(-1)^k A_k(x,\ t)w_{x^{2k}}+\sum_{k=1}^{2}(-1)^k B_k(t)w_{x^{2k}t}]$$
$$+\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial X^j}(F_j(u,\ u_x)w_{x^j t})+\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial X^j}(\sum_{h=0}^{1}\frac{\partial\tilde{F}_j}{\partial P_h}w_{x^h})v_{x^j t}$$
$$+\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\frac{\partial^i}{\partial X^i}(\sum_{h=0}^{1}\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial P_i\partial P_h}w_{x^h})+\tilde{g}'(u)\cdot w=0 \tag{36}$$

和初边值条件:

$$\begin{cases} w(-l,\ t)w(l,\ t)=0,\ w_{x^2}(-l,\ t)=w_{x^2}(l,\ t)=0, \\ w(x,\ 0)=w_t(x,\ 0)=0 \end{cases} \tag{37}$$

由引理2和引理4, 矢量值函数u_{x^k}, v_{x^k} (k=0, 1, 2) 在Q_T中均有界, 因此N维矢量$\frac{\partial\tilde{F}_j}{\partial P_h}$ (j, h=0, 1) 和N×N的Hession矩阵$\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial P_i\partial P_h}$ (i, h=0, 1) 也都是有界的。

以w_t和方程组(36)作标量乘, 然后在Q_t (0⩽t⩽T) 上积分, 分部积分后得:

$$\frac{1}{2}(w_t,\ w_t)+\frac{1}{2}(A_2(x,\ t)w_{x^2},\ w_{x^2})+[B_2(t)w_{x^2t},\ w_{x^2t}]+\sum_{j=0}^{1}[F_j(u,\ u_x)w_{x^j t},\ w_{x^j t}]$$
$$=\frac{1}{2}[A_{2t}w_{x^2},\ w_{x^2}]-[2A_{2x}w_{xt}+A_{2x^2}w_t,\ w_{x^2}]+[A_1 w_{x^2},\ w_t]+[B_1(t)w_{x^2t},\ w_t]$$

$$+[\bar{g}'\cdot w,\ w_t]-\sum_{j=0}^{1}[(\sum_{h=0}^{1}\frac{\partial\tilde{F}_j}{\partial P_h}w_{x^h})v_{x^jt},\ w_{x^jt}]-\sum_{k=0}^{1}[\sum_{h=0}^{1}\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial P_k\partial P_h}w_{x^h},\ w_{x^kt}] \tag{38}$$

在等式(38)两边同时加上一项$(1+a_2)[w_{x^2},\ w_{x^2t}]$,

和以前一样作估计，并注意到g连续可微，且当u在有界集中变动时，$g'(u)$也有界，就可以得到:

$$|w_t(\cdot,\ t)|^2_{L_2[-l,l]}+|w(\cdot,\ t)|^2_{W_2^2[-l,l]}\leqslant C\{\|w_t\|^2_{L_2(Q_t)}+\|w\|^2_{L_2(W_2^2[-l,l];\ [0,T])}\} \tag{39}$$

利用 Gronwall 不等式，由(39)式立即可以导出 w≡0，即 u≡v，定理证毕。

参 考 文 献

〔1〕孙和生. 一类非线性拟双曲型方程组. 中国科学(A辑), 1988, 8, 801—816

〔2〕周毓麟, 符鸿源. 广义Sine—Gordon型非线性高阶双曲方程组. 数学学报, 1983, 26, 234—249

〔3〕A.Friedman. Partial Diffrential equations, 1969

Initial—Boundary Value Problem for a Class of Nonlinear System of Pseudo—Hyperbolic Equations

Li Haifeng (ZhengZhou SPin. and Weav. Inst. of Tech.)

Yang Zhijian (ZhengZhou Inst. of Tech.)

Abstract: In this paper, Used Leary—Schauder fixed point theorem and prior—estimate metheds we discussed the existence, uniqueness of generalized global solution for a class of initial and boundary value problem of the nonlinear system of pseudo—hyperbolic equations.

Keywords: nonlinear pseudo—hyperbolic equations, initial—boundary value problem