第11卷 第4期 郑 州 工 学 院 学 报 Vol.11 No.4
1990年 12 月 Journal of ZhengZhou Institute of Technology Dec. 1990

GM(1, 1)建模方法的应用研究*

徐光先 吴泽宁

(郑州工学院水环系)

摘 要: 本文在分析数据序列性质与GM(1, 1)模型关系的基础上，指出了不同情况下的GM(1, 1)建模方法，提出了大M改进建模法，扩充了予测范围，提高了适用性。

关键词: 灰色系统，数据序列，予测模型，离散函数

GM(1, 1)是灰色系统予测模型，建立这种模型的实质是对原数据序列进行累加，使生成的数据序列呈一定规律，随机性弱化，然后用逼近的曲线作为模型，用以对系统进行予测。理论与实践证明，在满足某些条件下，用上述累加生成建立的GM(1, 1)模型，具有较高的精度，取得了满意的效果。在实践中发现，GM(1, 1)模型的予测精度与原数据序列的变化递变规律密切相关。例如，表1中为1978～1987年间我国农村用电的有关数据序列（用电构成），显然它们的变化规律是不同的：有的随时间增加而增大，有的随时间增加而减小。据此数据序列，用累加一次生成数据序列建立的GM(1, 1)模型见表2，这些模型的精度也是不同的。本文在于寻求适用于变化规律不同的原数据序列、精度高的GM(1, 1)建模方法。

表 1

年 份	数据编号			
	1	2	3	4
1978	54.00	46.00	23.96	8.68
1979	53.00	47.00	22.10	9.10
1980	54.70	45.30	20.60	10.25
1981	57.20	42.80	20.60	11.30
1982	56.40	43.40	19.00	12.40
1983	56.00	44.00	16.57	13.89
1984	55.50	44.50	15.17	15.75
1985	57.30	42.70	12.63	18.57
1986	59.38	40.62	11.40	17.80
1987	58.90	41.10	9.87	19.26

* 收稿日期: 1989.12.30

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 2

模型编号	模型	误差 (%)	
		最大	平均
1	$x_1^{(1)}(t+1)=4963.05c^{0.0108t}-4909.05$	-3.4	1.31
2	$x_2^{(1)}(t+1)=-3281.33c^{-0.0141t}+3327.33$	4.4	1.67
3	$x_3^{(1)}(t+1)=-258.71c^{-0.0945t}+282.67$	10.9	5.15
4	$x_4^{(1)}(t+1)=97.38c^{-0.0935t}-88.70$	-10.0	3.19

表 2 中的 $x^{(1)}(t+1)$ 为某一指标一次累加预测值，文中将要用到的 $x(t+1)$ 和 $x^{(0)}(t+1)$ 为某一指标直接生成预测值，t 为预测时间。

1 数据序列性质分析

为了具有典型性，便于说明问题，现将表 1 中 1、2 号数据序列进行适当调正，即按严格的递增或递减排列，并假定它们为已知原数据序列，用直接建模法建议的 GM(1, 1)模型如下：

$$x_1(t+1)=-41.22c^{-0.01867t}+94.22$$

$$x_2(t+1)=41.25c^{-0.01867t}+5.75$$

$$x_3(t+1)=-48.68c^{0.02825t}+72.64$$

$$x_4(t+1)=35.65c^{0.02892t}-26.97$$

分析这些数据序列和模型可知，其随时间变化的递变规律分别为：单调升凸、单调降凹，单调降凸和单调升凹的指数变化。不失一般性，现将上述四种类型的模型用同一方程式表示为：

$$x_t=L+bc^{-at}$$

x_t 的变化规律决定于参数值及其符号，四种曲线如图 1 所示。这四种曲线概括了 GM(1, 1)模型的各种可能形式。

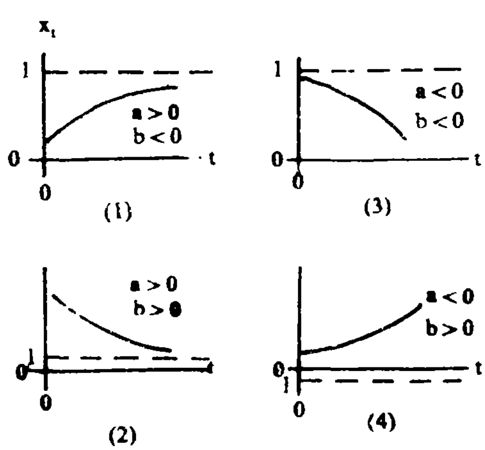

图 1

对问题性质分析如下：

定理 1：如原数据序列是单调升（降）凸（凹）离散函数，则直接建模法所得模型具有与其相同的几何形状。

前述实例说明了定理的正确性，严格的证明见文献[2]。

定理 2：若原数据序列是定义在 K (K={1, 2, ⋯, n}) 上的单调升非负离散函数，则一次累加建模法得到的 GM(1, 1)是单调

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

升凹的正离散函数；若原数据序列是定义在 K 上的单调降非负离散函数，则一次累加建模法得到的 GM(1, 1)是单调升凸的正离散函数。

证明：设有原数据序列 $x^{(0)}(k)>0$，$k\in K$；$x^{(0)}(k)>x^{(0)}(k-1)$，即单调升，$k\in N$，$N=\{2, 3, \cdots, n\}$，作一次累加生成得 $x^{(1)}(k)$，$x^{(1)}(k)$为单调升，且：

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$$

$$x^{(1)}(k-1)=\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)$$

$$x^{(1)}(k+1)=\sum_{i=1}^{k+1}x^{(0)}(i)$$

$$x^{(1)}(k+1)-x^{(1)}(k)=x^{(0)}(k+1)$$

$$x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)=x^{(0)}(k)$$

$$\because x^{(0)}(k+1)>x^{(0)}(k)$$

就是说，随着 k 的增大，$x^{(1)}(k)$每次增加幅值逐渐增大，所以，由此数据序列直接建立的 GM(1, 1)是单调升凹的正离散函数。

类似地，设 $x^{(0)}(k)>0$，$k\in K$；$x^{(0)}(k)<x^{(0)}(k-1)$，即单调降，$k\in N$，$N=\{2, 3, \cdots, n\}$，作一次累加生成得 $x^{(1)}(k)$，为单调升，且：

$$x^{(1)}(k+1)-x^{(1)}(k)=x^{(0)}(k+1)$$

$$x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)=x^{(0)}(k)$$

$$\because x^{(0)}(k+1)<x^{(0)}(k)$$

即随着 k 的增大，$x^{(1)}(k)$每次增加的幅值逐渐减小，所以，由此数据序列直接建立的 GM(1, 1)是单调升凸的正离散函数。此点与文献[2]中定理 3 相悖，我们认为文献[2]对此的论述是不当的。

推论 1：若原数据序列为指数变化，除直接建模法建立的 GM(1, 1)，模型递变规律或几何形状相同外，一次或多次累加生成建模法得到的 GM(1, 1)递变规律或几何形状几乎都发生了变化。

推论 2：若原数据序列是单调升凸（降凹）函数时，直接建模法所得模型比累加建模法所得模型更符合实际情况。

推论 3：当原数据序列是单调升凹（降凸）函数时，为了利用单调升凸函数的优点，提高模型精度，可按如下生成建模，当原数据序列是单调降凸函数时，采用一次累加生成建模；当原数据序列是单调升凹函数时，取：

$$M>>\max_{k}\{x^{(0)}(k),\ k\in K\}$$

令：$$y^{(0)}(k)=M-x^{(0)}(k),\ k\in K$$

然后用生成的 $y^{(0)}(k)$一次累加生成建模。我们称这种方法为大 M 建模法。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2 GM(1, 1)实用建模法

GM(1, 1)是一种呈指数变化的予测模型，然而，由前述分析可知，累加建模法对四种指数递变规律的情况并不都能获得满意的结果。同时，还应注意到，按该模型进行预测，可能会出现事隔某些年后功能参数的翻番或折半的问题，甚至会达到荒谬的程度。这里应特别注意具有升凹和降凸性质的模型，例如，用表2中模型3和4予测2000年的指标分别为3.52%和61.87%，这些数值的具体含义是农村用电（包括县工业）构成中农业灌溉和乡镇工业用电所占比重，按照予测，包括乡镇工业、灌溉、副业加工业及生活用电在内的农村用电（不包括县工业）到2000年为66.88%，这就是说，向农村的供电几乎全部为乡镇工业所消耗，显然这是不符合实际的。

因此，在建模时首先要判断和确定原数据序列的递变规律性质，然后根据数据序列性质用不同方法建立GM(1, 1)模型。

设 $x^{(0)}(k)$，$k\in K$ 为原数据序列，对于单调升（降）离散函数，将有如下关系：

对单调升凸离散函数：

$$\sum_{k=2}^{n/2}(x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1))>\sum_{k=n/2}^{n}(x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1))$$

对单调升凹离散函数：

$$\sum_{k=2}^{n/2}(x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1))<\sum_{k=n/2}^{n}(x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1))$$

对单凋降凹离散函数：

$$-\sum_{k=2}^{n/2}(x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1))>-\sum_{k=n/2}^{n}(x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1))$$

对单调降凸离散函数：

$$-\sum_{k=2}^{n/2}(x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1))<-\sum_{k=n/2}^{n}(x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1))$$

一般情况下，用这些关系式来区分原数据序列的递变规律是简单而实用的。

参数(a, u)的计算是建立GM(1, 1)模型的重要环节，为了便于使用，我们采用解析表达式为：

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}x(i)\sum_{i=1}^{n-1}y(i)-(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}x(i)y(i)}{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}x^2(i)-[\sum_{i=1}^{n-1}x(i)]^2}$$

$$u=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}x^2(i)\sum_{i=1}^{n-1}y(i)-\sum_{i=1}^{n-1}x(i)\sum_{i=1}^{n-1}x(i)y(i)}{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}x^2(i)-[\sum_{i=1}^{n-1}x(i)]^2}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中：

$$x(i)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^{(0)}(i)+x^{(0)}(i+1)), & \text{当直接建模时}\\ \frac{1}{2}(x^{(1)}(i)+x^{(1)}(i+1)), & \text{当一次累加建模时}\end{cases}$$

$$y(i)=\begin{cases}x^{(0)}(i+1)-x^{(0)}(i), & \text{当直接建模时}\\ x^{(0)}(i+1), & \text{当一次累加建模时}\end{cases}$$

$$i=1, 2, \cdots, n-1$$

最后，提出具体建模程序如下：

①用判别式确定原数据序列 $x^{(0)}(k)$的递变规律．若 $x^{(0)}(k)$为升凸或降凹离散函数时，转步骤②；否则转③；

②用直接建模法建立 GM(1, 1)模型，进行予测；

③若 $x^{(0)}(k)$为降凸离散函数时，用一次累加生成建模法建立 GM(1, 1)模型，进行予测（包括累减还原），否则转④；

④此时 $x^{(0)}(k)$为升凹离散函数，取大数 M，采用大 M 改进建模法建立 GM(1, 1)模型，进行予测（包括还原）。

3　实验验证

依据表 1 内数据序列，采用直接、一次累加和大 M 改进等建模方法，建立了 GM(1, 1)模型，进行了曲线拟合和予测精度分析，为节省篇幅，表 3 中仅列出了部分模型的情况（1，2 号数据略有调正）。

表　3

数据编号	性质	建模法	模型性质	模　　型	误差(%) 最大	误差(%) 平均
1	升凸	直接	升凸	$x_1^{(0)}(t+1)=-41.22e^{-0.01867t}+94.22$	1.3	0.332
		累加	升凹	$x_1^{(1)}(t+1)=4720.25e^{-0.01139t}-4667.25$	1.05	0.254
2	降凹	直接	降凹	$x_2^{(0)}(t+1)=41.25e^{-0.01867t}+5.75$	−1.76	0.435
		累加	升凸	$x_2^{(1)}(t+1)=-3085.2e^{-0.01503t}+3132.2$	−1.52	0.368
3	降凸	直接	降凸	$x_3^{(0)}(t+1)=-48.68e^{-0.02825t}+72.64$	5.46	2.25
		累加	升凸	$x_3^{(1)}(t+1)=-258.71e^{-0.09445t}+282.67$	10.9	5.15
4	升凹	直接	升凹	$x_4^{(0)}(t+1)=35.65e^{-0.02892t}-26.97$	6.9	3.7
		累加	升凹	$x_4^{(1)}(t+1)=97.38e^{0.09348t}-88.70$	10.0	3.19
		大 M	升凸	$x_4^{(1)'}(t+1)=-616.13e^{-0.0524t}+647.45$	6.0	2.727

对实例经过分析，可以得出如下结论：

3．1　依据不同类型的数据序列，用不同的建模方法所得 GM(1, 1)模型曲线形式与前述

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

相应定理或推论是一致的．例如，用直线建模法所得的模型均保持原数据序列所描绘的几何形状，累加建模法所得模型，原数据序列为升凸（凹）的变为升凹的，原数据序列为降凸（凹）的则变为升凸的．

3．2　采用推荐的建模程序和建模方法，模型的精度符合要求，有些并有所提高．例如，对于升凹的数据序列，用大 M 法建模与一次累加建模相比，最大误差由 10%降为 6%，精度提高了 40%，即使对文献[3]中的例 3，用本文推荐的方法，模型精度也提高了 50%．

3．3　推荐的建模方法可以延长模型适用予测期，适用予测期一般在 15～20 年．例如，对降凸的数据序列 3，用直接建模法予测 2000 年的指标值为−17.99，显然是不合理的．而用累加建模法予测 2000 年的指标值为 3.52。对于升凹的数据序列 4（乡镇工业用电占包括县办工业在内的整个农村用电的比重），用累加建模法予测 2000 年的指标值为 61.87，这一数值接近除县工业用电外其它农村用电的总和，这显然也是不合理的．而用大 M 法予测 2000 年的指标值为 29.53，比较符合实际。用累加建模法算得同一指标值，相应的年份为 1991 年。由分析可见，依据不同情况采用推荐的相应建模方法，可以增加模型适用的予测期限。

3．4　一般情况下，直接建模法的模型有较好的模拟精度，这是直接建模法的优点．但应注意，对于降凸的数据序列，采用直接建模法所建模型，只能适用于短期（5 年以内）予测，否则，会出现荒谬的情况。

参　考　文　献

〔1〕邓聚龙．灰色系统・社会・经济．国防工业出版社，1985

〔2〕王义闹．GM(1，1)的直接建模方法及性质．系统工程理论与实践，1988年第1期

〔3〕罗桂荣等．灰色模型的一点改进及应用．系统工程理论与实践，1988年第2期

Study on Application of Modelling for GM(1, 1)

Xu Guangxian　　Wu Zening
(ZhengZhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper, on the basis of analyzing the relationship between the properties of the original datum series and GM(1,1) model, the modellings for GM(1,1) in different cases are pointed out, and the modelling of infinite constant M for GM(1,1) is put forward. This expands the predicting scope of the model, and raises its practicality.

Keywords: grey system theory, original discret data series, forecasting model, discrete function

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net