第11卷 第4期 郑州工学院学报 Vol.11 No.4
1990年 12 月 Journal of ZhengZhou Institute of Technology Dec. 1990

钢筋混凝土板层状元分析*

张雷顺

(郑州工学院水环系)

摘　要: 本文初步介绍了钢筋混凝土板的层状有限元法。

关键词: 钢筋混凝土板，层状单元

钢筋混凝土板的非线性有限无分析，国外自七十年代开始有人研究，国内研究还很少，至今仍有很多问题待解决。

钢筋混凝土板有限元分析，采用层状元是较为合适的。若引用变形的Kirchhoff假定，则问题就可转化为二维问题，从而可应用现有二维问题的本构关系及破坏准则，按通常方法进行有限元分析。

本文以矩形层状元为例，简要地说明了该方法的分析过程。

1　单元剖分

用水平面和铅直面将板分成有限个矩形层状单元。含钢筋的单元称为钢筋层单元。参见图1。

为方便，中面单元称为基单元，与中面单元重迭的单元称为伴随单元。每个单元有四个刚结点，每个结点有五个自由度，它们是x、y向位移u、v，挠度w，绕x、y轴的转角θ_x、θ_y。单元之间仅通过结点相互作用。当板变形采用Kirchhoff假定时，其单元与伴随单元对应结点形成刚性柱。

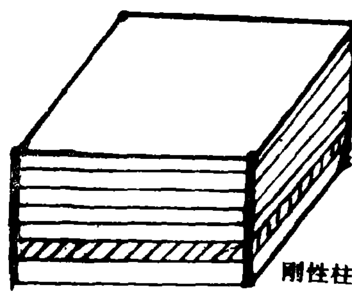

图　1

2　位移模式

基单元x、y向位移u_0、v_0与挠度w_0是最基本的物理量，伴随单元的物理量可由其确定。

基单元位移模式取为:

* 收稿日期: 1990.03.28

$$\begin{cases} u_0 = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy & (1) \\ v_0 = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy & (2) \\ w_0 = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 & \\ \quad \beta_8 x^2 y + \beta_9 xy^2 + \beta_{10} y^3 + \beta_{11} x^3 y + \beta_{12} xy^3 & (3) \\ \theta_{x0} = \dfrac{\partial W}{\partial y} = \beta_3 + \beta_5 x + 2\beta_6 y + \beta_8 x^2 + 2\beta_9 xy & \\ \quad + 3\beta_{10} y^2 + \beta_{11} x^3 + 3\beta_{12} xy^2 & (4) \\ \theta_{y0} = -\dfrac{\partial W}{\partial x} = -(\beta_2 + 2\beta_4 x + \beta_5 y + 3\beta_7 x^2 + 2\beta_8 xy & \\ \quad + \beta_9 y^2 + 3\beta_{11} x^2 y + \beta_2 y^3) & (5) \end{cases}$$

将结点x、y的坐标及结点位移代入(1)到(5)，可解得α_1至α_8和β_1至β_{12}，再代回整理后得：

$$\begin{cases} u_0 = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_p u_p \\ v_0 = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m + N_p v_p \\ w_0 = H_i w_i + H_{xi}\theta_{xi} + H_{yi}\theta_{yi} + H_j w_j + H_{xj}\theta_{xj} + H_{yj}\theta_{yj} \\ \quad + H_m w_m + H_{xm}\theta_{xm} + H_{ym}\theta_{ym} + H_p w_p + H_{xp}\theta_{xp} + H_{yp}\theta_{yp} \end{cases} \tag{6}$$

其中：

$$\begin{cases} N_i = \dfrac{1}{4}(1 + \dfrac{\xi}{\xi_i})(1 + \dfrac{\eta}{\eta_i}) = \dfrac{1}{4\xi_i\eta_i}(\xi_i + \xi)(\eta_i + \eta) \\ H_i = \dfrac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) + (2 + \xi\xi_i + \eta\eta_i - \xi^2 - \eta^2) \\ H_{xi} = -\dfrac{1}{8} b\eta_i(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 - \eta^2) \\ H_{yi} = \dfrac{1}{8} a\xi_i(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \end{cases} \quad (i,\ j,\ m,\ p) \tag{7}$$

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \xi_i = \frac{x_i}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \eta_i = \frac{y_i}{b} \quad (i,\ j,\ m,\ p) \tag{8}$$

根据Kirchhoff假定，距中面为z的伴随单元的位移应为：

$$\begin{cases} u = u_0 - z\dfrac{\partial w}{\partial x} = u_0 + z\theta_{y0} \\ v = v_0 - z\dfrac{\partial w}{\partial y} = v_0 - z\theta_{y0} \\ w = w_0 \\ \theta_x = \theta_{x0} \\ \theta_y = \theta_{y0} \end{cases} \tag{9}$$

将(9)写成矩阵形式：$\{f\} = [N]\{\delta\}^e$ (10)

其中：$\{f\}=[\,u\quad v\quad w\quad \theta_x\quad \theta_y\,]^T$

$$\{\delta\}^e=[\,u_i\ v_i\ w_i\ \theta_{xi}\ \theta_{yi}\ u_j\ v_j\ w_j\ \theta_{xj}\ \theta_{yj}\ u_m\ v_m\ w_m\ \theta_{xm}\ \theta_{ym}\ u_p\ v_p\ w_p\ \theta_{xp}\ \theta_{yp}\,]^T$$

$$[N]=\{\,A_i\quad A_j\quad A_m\quad A_p\,]$$

$$[A_i]=\begin{bmatrix} N_i & 0 & -z\frac{\partial H_i}{\partial x} & -z\frac{\partial H_{xi}}{\partial x} & -z\frac{\partial H_{yi}}{\partial x} \\ 0 & N_i & -z\frac{\partial H_i}{\partial y} & -z\frac{\partial H_{xi}}{\partial y} & -z\frac{\partial H_{yi}}{\partial y} \\ 0 & 0 & H_i & H_{xi} & H_{yi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial y} & \frac{\partial H_{xi}}{\partial y} & \frac{\partial H_{yi}}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial H_i}{\partial x} & -\frac{\partial H_{xi}}{\partial x} & -\frac{\partial H_{yi}}{\partial x} \end{bmatrix}\quad (i,\ j,\ m,\ p) \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial x}&=\frac{1}{8a}(1+\eta_i\eta)[\xi_i(2+\xi_i\xi+\eta_i\eta-\xi^2-\eta^2)+(1+\xi_i\xi)(\xi_i-2\xi)] \\ \frac{\partial H_i}{\partial y}&=\frac{1}{8b}(1+\xi_i\xi)[\eta_i(2+\xi_i\xi+\eta_i\eta-\xi^2-\eta^2)+(1+\eta_i\eta)(\eta_i-2\eta)] \\ \frac{\partial H_{xi}}{\partial x}&=-\frac{b}{8a}\eta_i\xi_i(1+\eta_i\eta)(1-\eta^2) \\ \frac{\partial H_{xi}}{\partial y}&=\frac{1}{8}\eta_i(1+\xi_i\xi)(3\eta_i\eta^2+2\eta-\eta_i) \\ \frac{\partial H_{yi}}{\partial x}&=-\frac{1}{8}\xi_i(1+\eta_i\eta)(3\xi_i\xi^2+2\xi-\xi_i) \\ \frac{\partial H_{yi}}{\partial y}&=\frac{a}{8b}\xi_i\eta_i(1+\xi_i\xi)(1-\xi^2) \end{aligned}\right.$$

$$(i,\ j,\ m,\ p) \tag{12}$$

位移模式(10)确定的单元是完备的，但是不完全协调.

(10)式可做为基单元和伴随单元位移模式的统一表达式.

为了减少计算时间，可只把基单元结点位移做为基本未知量．记基单元结点位移为：

$$\{\delta^0\}^e=[\,u_i^0\ v_i^0\ w_i^0\ \theta_{xi}^0\ \theta_{yi}^0\ u_j^0\ v_j^0\ w_j^0\ \theta_{xj}^0\ \theta_{yj}^0\ u_m^0\ v_m^0\ w_m^0\ \theta_{xm}^0\ \theta_{ym}^0\ u_p^0\ v_p^0\ w_p^0\ \theta_{xp}^0\ \theta_{yp}^0\,]^T$$

则伴随单元的结点位移为：

$$\{\delta\}^e = \{\delta^0\}^e + [\ z\theta^0_{yi}\ \ -z\theta^0_{xi}\ \ 0\ 0\ 0\ \ z\theta^0_{yj}\ \ -z\theta^0_{xj}\ \ 0\ 0\ 0$$
$$z\theta^0_{ym}\ \ -z\theta^0_{xm}\ \ 0\ 0\ 0\ \ z\theta^0_{yp}\ \ -z\theta^0_{xp}\ \ 0\ 0\ 0\ ]^T$$

将其代人(10)整理后得：$\{f\} = [N']\{\delta^0\}^e$ (13)

其中：$[N'] = [\ A_i'\ \ A_j'\ \ A_m'\ \ A_p'\ ]$

$$[A_i'] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & -z\frac{\partial H_i}{\partial x} & -z\frac{\partial H_{xi}}{\partial x} & z(N_i - \frac{\partial H_{yi}}{\partial x}) \\ 0 & N_i & -z\frac{\partial H_i}{\partial y} & -z(N_i + \frac{\partial H_{xi}}{\partial y}) & -z\frac{\partial H_{yi}}{\partial y} \\ 0 & 0 & H_i & H_{xi} & H_{yi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial y} & \frac{\partial H_{xi}}{\partial y} & \frac{\partial H_{yi}}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial H_i}{\partial x} & -\frac{\partial H_{xi}}{\partial x} & -\frac{\partial H_{yi}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i,\ j,\ m,\ p) \quad (14)$$

3 等效结点荷载

单元等效结点荷载可根据实际荷载与等效结点荷载，在任一满足相容条件虚位移上的虚功等值条件确定。

记等效结点荷载为：

$$\{R\}^e = [\ X_i\ Y_i\ Z_i\ T_{xi}\ T_{yi}\ X_j\ Y_j\ Z_j\ T_{xj}\ T_{yj}$$
$$X_m\ Y_m\ Z_m\ T_{xm}\ T_{ym}\ X_p\ Y_p\ Z_p\ T_{xp}\ T_{yp}\ ]^T$$

则点A(X，Y)处集中力p的等效结点荷载为：

$$\{R\}^e = [N]_A^T\{p\} \quad (16)$$

其中：$\{p\} = [\ 0\ \ 0\ \ p\ \ 0\ \ 0\ ]^T$

集度为q的分布面力的等效结点荷载为：

$$\{R\} = \iint [N]^T\{q\}dxdy \quad (17)$$

其中：$\{q\} = [\ 0\ \ 0\ \ q\ \ 0\ \ 0\ ]^T$

p、q以Z轴正向为正。

由于位于同一法线上的结点形成刚柱，故同一刚柱上所得等效结点荷载都可以作用在基单元结点上。

当单元中心作用集中力p时：

$$\{R\}^e = p[\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ \frac{b}{8}\ \ -\frac{a}{8}\ \ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ \frac{b}{8}\ \frac{a}{8}\ \ 0\ 0\ \frac{1}{4}$$

$$-\frac{b}{8}\ \frac{a}{8}\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ -\frac{b}{8}\ -\frac{a}{8}\ ]^T \tag{18}$$

当单元上作用均布荷载q时:

$$\{R\}^e = 4abq[\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ \frac{b}{12}\ -\frac{a}{12}\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ \frac{b}{12}\ \frac{a}{12}\ 0\ 0\ \frac{1}{4}$$

$$-\frac{b}{12}\ \frac{a}{12}\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ -\frac{b}{12}\ -\frac{a}{12}\ ]^T \tag{19}$$

4 几何矩阵

将(13)代入几何方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \nu_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

有: $\{\varepsilon\} = [B']\{\delta^0\}^e$ (20)

其中:

$$\{\varepsilon\} = [\ \varepsilon_x\ \ \varepsilon_y\ \ \nu_{xy}\ ]^T$$

$$[B'] = [\ B_i'\ \ B_j'\ \ B_m'\ \ B_p'\ ]$$

$$[B_i'] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -z\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} & -z\frac{\partial^2 H_{xi}}{\partial x^2} & -z(\frac{\partial^2 H_{yi}}{\partial x^2} - \frac{\partial N_i}{\partial x}) \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & -z\frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} & -z(\frac{\partial^2 H_{xi}}{\partial y^2} + \frac{\partial N_i}{\partial y}) & -z\frac{\partial^2 H_{yi}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -2z\frac{\partial^2 H_i}{\partial x \partial y} & -z(2\frac{\partial^2 H_{xi}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial x}) & -z(2\frac{\partial^2 H_{yi}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial N_i}{\partial y}) \end{bmatrix}$$

$$(i,\ j,\ m,\ p) \tag{21}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{1}{4a\xi_i\eta_i}(\eta_i + \eta) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{1}{4b\xi_i\eta_i}(\xi_i + \xi) \\ \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} &= \frac{1}{8a^2}(1 + \eta_i\eta)[\xi_i(\xi_i - 2\xi) + (\xi_i^2 - 4\xi_i\xi - 2)] \\ \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} &= \frac{1}{8b^2}(1 + \xi_i\xi)[(\eta_i(\eta_i - 2\eta) + (\eta_i^2 - 4\eta_i\eta - 2)] \end{aligned}\right.$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 H_i}{\partial x \partial y} = \frac{1}{8ab}\{\eta_i[\xi_i(2+\xi_i\xi+\eta_i\eta-\xi^2-\eta^2)+(1+\xi_i\xi)\\
&\quad(\xi_i-2\xi)]+\xi_i(1+\eta_i\eta)(\eta_i-2\eta)\}\\
&\frac{\partial^2 H_{xi}}{\partial x^2} = 0\\
&\frac{\partial^2 H_{xi}}{\partial y^2} = \frac{1}{4b}\eta_i(1+\xi_i\xi)(3\eta_i\eta+1)\\
&\frac{\partial^2 H_{xi}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{8a}\xi_i\eta_i(3\eta_i\eta^2+2\eta-\eta_i)\\
&\frac{\partial^2 H_{yi}}{\partial x^2} = \frac{1}{4a}\xi_i(1+\eta_i\eta)(3\xi_i\xi+1)\\
&\frac{\partial^2 H_{yi}}{\partial y^2} = 0\\
&\frac{\partial^2 H_{yi}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{8b}\xi_i\eta_i(3\xi_i\xi+2\xi-\xi_i)
\end{aligned}
\right.
$$

$$(i,\ j,\ m,\ p) \tag{22}$$

5 本构关系

混凝土层单元可视为增量正交异性体，由于其处于双向应力状态，可采用 Pecknold 所建议的增量形式的本构关系：

$$
\begin{bmatrix} \triangle\sigma_1 \\ \triangle\sigma_2 \\ \triangle\tau_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} E_1 & \mu\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \mu\sqrt{E_1E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu^2)G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \triangle\varepsilon_1 \\ \triangle\varepsilon_2 \\ \triangle\tau_2 \end{bmatrix} \tag{23}
$$

μ为折合泊松比。

$$G = \frac{1}{4(1-\mu^2)}(E_1+E_2-2\mu\sqrt{E_1E_2})$$

E_1、E_2为施加上级荷载增量后，在应力主向1、2的切线模量。

E_1、E_2可如下求得：

$$E_i = \frac{\partial\sigma_i}{\partial\varepsilon_{iu}} = \frac{E_0[1-(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}})^2]}{[1+(\frac{E_0}{E_s}-2)(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}})+(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}})^2]^2},\ (i=1,\ 2) \tag{24}$$

其中：ε_{iu}为等效单向应变；ε_{ic}为最大压应力σ_{ic}对应的等效应变；$E_s=\frac{\sigma_{ic}}{\varepsilon_{ic}}$，$E_0$为原点切线模量。

(23)可简记为：$\{\triangle\sigma\}=[D']\{\triangle\varepsilon\}$ (25)

显然，当$E_1=E_2$时，[D]为平面应力状态下的弹性矩阵。

(25)式适用于局部应力主轴坐标系。利用转轴关系，可得整体坐标下增量本构关系。

$$\{\triangle\sigma\}=[D]\{\triangle\varepsilon\} \tag{26}$$

设钢筋层单元的x、y向截面积A_1、A_2，钢筋截面积为A_{g1}、A_{g2}，若双向采用相同的模量，则会造成x、y向厚度不同，给有限元分析带来困难。为此采用保持厚度不变而调整模量的方法。

设钢筋的切线模量为E_g，则x、y向分别发生单位应变所需的力为$A_{g1}E_g$、$A_{g2}E_g$。折算模量为：

$$\begin{cases} E_{g1}=\lambda_1\dfrac{A_{g1}}{A_1}E_g=\lambda_1\eta_1E_g \\ E_{g2}=\lambda_2\dfrac{A_{g2}}{A_2}E_g=\lambda_2\eta_2E_g \end{cases} \tag{27}$$

其中：λ_1、λ_2为钢筋层单元中混凝土影响系数。

η_1、η_2为钢筋层单元x、y向配筋率。

这样，钢筋层单元增量本构关系为：

$$\begin{bmatrix}\triangle\sigma_1\\ \triangle\sigma_2\\ \triangle\tau_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{g1} & 0 & 0\\ 0 & E_{g2} & 0\\ 0 & 0 & 0.4E_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangle\varepsilon_1\\ \triangle\varepsilon_2\\ \triangle\tau_2\end{bmatrix} \tag{28}$$

其中E_0为混凝土弹模。(28)式可简记为：

$$\{\triangle\sigma\}=[D]\{\triangle\varepsilon\} \tag{29}$$

上式适用于正交钢筋走向坐标系。

6 单刚与总刚

应用虚位移原理，可导出单元刚度阵。设任给满足相容条件的虚位移和虚应变为$\{\delta^*\}^e$、$\{\varepsilon^*\}$，单元结点力为：

$$\{F\}^e=\begin{bmatrix}\{F_i\}\\\{F_j\}\\\{F_m\}\\\{F_p\}\end{bmatrix};\qquad \{F_i\}=\begin{bmatrix}U_i\\V_i\\W_i\\M_{\theta xi}\\M_{\theta yi}\end{bmatrix}\qquad (i,\ j,\ m,\ p)$$

由虚位移原理：$(\{\delta^*\}^e)^T\{F\}^e=\iint_e\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}t_e dA$

将：$\{\varepsilon^*\}=[B]\{\delta^*\}^e$，　$\{\sigma\}=[D][B]\{\sigma\}^e$

代入，有：$(\{\delta^*\}^e)^T\{F\}^e=(\{\delta^*\}^e)^T(\iint_e[B]^T[D][B]t_e dA)\{\delta\}^e$

由$\{\delta^*\}^T$的任意性，得：$\{F\}^e=\iint_e[B]^T\{\sigma\}t_e dA$　(30)

或$\{F\}^e=(\iint_e[B]^T[D][B]t_e dA)\{\delta\}^e$

其中：t_e为单元e的厚度。

$$[B]=[\ B_i\quad B_j\quad B_m\quad B_p\ ]$$

$$[B_i]=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -z\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} & -z\frac{\partial^2 H_{xi}}{\partial x^2} & -z\frac{\partial^2 H_{yi}}{\partial x^2}\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & -z\frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} & -z\frac{\partial^2 H_{xi}}{\partial y^2} & -z\frac{\partial^2 H_{yi}}{\partial y^2}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -2z\frac{\partial^2 H_i}{\partial x\partial y} & -2z\frac{\partial^2 H_{xi}}{\partial x\partial y} & -2z\frac{\partial^2 H_{yi}}{\partial x\partial y}\end{bmatrix}$$

$(i,\ j,\ m,\ p)$　(31)

从而得单元刚度阵：$[k]=\iint_e[B]^T[D][B]t_e dA$　(32)

于是：$\{F\}^e=[k]\{\delta\}^e$　(33)

若把基单元j的第i个伴随单元的单刚记为$[k]^{ij}$，则：

$$\{F\}^{ji}=[k]^{ji}\{\delta\}^{ji}\tag{34}$$

将基单元及伴随单元的(34)式相加，有：$\sum_i\{F\}^{ji}=\sum_i[k]^{ji}\{\delta\}^{ji}$

注意到$\{\delta\}^{ji}$与基单元结点位移$\{\delta^0\}^j$的关系，上式可写为：

$$\{F\}^j=(\sum[k']^{ji})\{\delta^0\}^j\tag{35}$$

其中：$\{F\}^j$为第j个基单元及伴随单元的刚柱的刚柱力。

$[k']^{ji}$为$[k]^{ji}$的4 + 5n列变为4 + 5n列减去2 + 5n列的差，5 + 5n列变为5 + 5n列加上1 + 5n列的和，$n = 0$、1、2、3，其它列不变的矩阵。

记：$$\sum_i [k']^{ji} = [k']^j \tag{36}$$

则(35)可写为：$$\{F\}^j = [k']^j\{\delta^0\}^j \tag{37}$$

$[k\}^j$称为基单元的等效刚度阵。

根据所有刚柱的平衡条件，经推导有：

$$[K]\{\delta\} = \{k\} \tag{38}$$

其中：$\{k\}$为所有刚柱上等效刚柱荷载向量；

$\{\delta\}$为所有基单元的结点位移向量；

$\{K\}$为总刚度阵，可由下式计算：

$$[K] = \sum_j [k']^j = \sum_j \sum_i [k']^{ji} \tag{39}$$

7 破坏准则

7.1 混凝土破坏准则

混凝土处于比向应力状态时，可采用目前国际上较流行的Kupfer(1973)提出的破坏准则：

$$\sigma_1 < 0, \quad \sigma_2 < 0$$

$$\sigma_{2c} = \frac{1 + 3.65\alpha}{(1+\alpha)^2}\sigma_c$$

$$\sigma_{1c} = \alpha\sigma_{2c}, \quad \alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$\sigma_1 < 0, \quad \sigma_2 > 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{2c} = \dfrac{1 + 3.28\alpha}{(1+\alpha)^2}\sigma_c \\ \sigma_{1c} = \alpha\sigma_{2c} \end{cases} \quad (-0.17 \leqslant \alpha \leqslant 0)$$

$$\begin{cases} \sigma_{2c} = 0.65\sigma_c \\ \sigma_{1c} = R_1 \end{cases} \quad (-\infty < \alpha < -0.17)$$

$$\sigma_1 < 0, \quad \sigma_2 < 0$$

$$\sigma_{1c} = R_1, \text{或：} \sigma_{2c} = R_1$$

其中σ_c、R_1为混凝土单轴抗压、抗拉强度，σ_{1c}、σ_{2c}为σ_1、σ_2向的破坏强度。

7.2 钢筋层的处理

假定钢筋为理想弹塑性体，则当x向钢筋屈服时：$E_{g1}=0$，　$E_{g2}=E_{g2}$

当y向钢筋屈服时：$E_{g1}=E_{g1}$，　$E_{g2}=0$

当双向屈服时：$E_{g1}=E_{g2}=0$

若假定钢筋为其它模型时，也可写出钢筋屈服后相应模量表达式。

8 单元破坏

采用(10)式所示的位移模式，层单元内的应力、应变为x、y的函数，也就是说各点的应力、应变是不同的。这种单元破坏处理不象常应力常应变单元那么简单。目前对此处理方法不一。当对裂缝位置及伸展情况没有过高精度要求时，可以采用不划裂缝边界的模型。

最简单的办法是将单元内几个控制点的应力加以平均，把平均应力做为单元应力，然后利用破坏准则进行判断。

也可以采用等效常应力、常应变的子单元模型。首先规定单元中几个控制点，将其邻近部分做为点的控制域，每个控制域为一个子单元。根据有限元的理论基础变分原理知，在保持子单元形变势能不变情况下，可用子单元所谓等效常应力与常应变来代替。设第i级荷载增量施加后，子单元应力增量及应变为$\{\triangle\sigma\}_i$和$\{\varepsilon\}_i$，则子单元形变势能为：

$$\iint_{\triangle l}\{\varepsilon\}_i^T\{\triangle\sigma\}_i t_e dA$$

设单元等效应力增量及应变为$\{\triangle\bar{\sigma}\}_i$和$\{\varepsilon\}_i$，由等值条件得：

$$\{\bar{\varepsilon}\}_i^T\{\triangle\bar{\sigma}\}_i=\frac{1}{\triangle_l}\iint_{\triangle l}\{\varepsilon\}_i^T\{\triangle\sigma\}_i dA \tag{40}$$

$\{\triangle\bar{\sigma}\}_i$可采用逐渐逼近法求得。先以控制点值做为第一近似值，比较(40)式两边大小，定下第二近似值，经几次试算得等效应力值。根据等效应力来判断单元是否处于破坏状态。

利用$\{\triangle\varepsilon\}_i=[B]\{\triangle\delta\}_i^e$求得控制点i的应变增量，进而由$\{\triangle\sigma\}_i=[D]_i\{\triangle\varepsilon\}_i$求得控制点i的应力增量。由于子单元很小，可把求得的$\{\triangle\varepsilon\}_i$、$\{\triangle\sigma\}_i$做为子单元的应变增量、应力增量，据此来判断单元是否处于破坏状态。

采用子单元模型时，若i点σ_i向受拉破坏，$[D]_i$可取为：

$$[D]_i=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&E&0\\0&0&\beta G\end{bmatrix}$$

当其受压破坏时：$[D]_i=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\beta G\end{bmatrix}$

其中β为剪力因子。

于是由：$[k]_i = \iint\limits_{\triangle i}[B]^T[D]_i[B]t_e dA$

可求得子单元刚度阵．式中$\triangle_i$为子单元 i 的积分域．整个单元刚度阵为所有子单元刚度阵之和，即：

$$[k]^e = \sum_i [k]_i$$

在子单元破坏时，一方面要调正单元刚度阵，另一方面由于引起应力的重分布，要确定不平衡结点力．设子单元超额应力为$\{\sigma\}^i_{ex}$，则不平衡结点力为：

$$[F]^e_i = \iint\limits_{\triangle i}[B]^T\{\sigma\}^i_{ex}dA \tag{41}$$

9 结束语

本文初步讨论了钢筋混凝土板的层状元法，此法的特点是：

1、考虑了板中面的水平位移；

2、运用了基单元概念，从而使问题求解转化为基单元结点位移，可减小计算时间；

3、对单元破坏引用了子单元模型，这从一方面体现了单元劲化，给处理带来了一定方便；

4、采用本法可以计算板的非线性及开裂问题．

参考文献

〔1〕Z.P.Bazant等著．钢筋混凝土有限元分析，1982年

〔2〕张雷顺．钢筋混凝土板层状单元法分析，1990年

〔3〕周氏等编．现代钢筋混凝土基本理论．上海交通大学出版社，1989年

〔4〕A.C.阿加雷著．板壳应力，1981年

Analysis of Reinforced Concrete Slabs by the Layer Lement

Zhang LeiShun

(ZhengZhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper, analysis of reinforced concrete slabs by the layer lements is introduced.

Keywords: reinforced concrete slabs, finite element method