第11卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.11 No.3
1990年 9 月 Journal of ZhengZhou Institute of Technology Sep. 1990

Banach 空间取值的囿变函数与绝对连续函数的两个重要结论*

徐建国

(郑州工学院数力学)

摘 要: 本文给出了抽象囿变函数与绝对连续函数在适当的范数意义下均构成 Banach 空间的结论。

关键词: *Banach* 空间，范数，囿变函数，绝对连续函数

1 预备知识

实函数中囿变函数与绝对连续函数是两类重要函数。它们能否构成 Banach 空间？本文在更为广泛的意义下回答了这一问题：在任何 Banach 空间内取值的囿变函数与绝对连续函数在适当定义范数之后均构成 Banach 空间。

为了下面的需要。我们规定 E 为 Banach 空间，$\|\cdot\|_1$ 为其范数。

设 f，g 为映[a，b]入 E 的二映射，规定运算：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (\alpha f)(x)=\alpha f(x) \quad (\alpha \text{ 为数})$$

定义 1：设 f：[a,b]→E，考察区间[a,b]的任一组分点： $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

令$V_f(x_0, \cdots, x_n)=\sum\limits_{K=1}^{n}\|f(x_K)-f(x_{K-1})\|_1$，当分点变动时称上确界 $\sup\limits_{(x_0, \cdots, x_n)} V_f(x_0, \cdots, x_n)$ 为 f 在[a，b]上的总变差，记为$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$。若$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty$，则称 f 为[a，b]上的囿变函数（或称有界变差函数），所有[a, b]上的囿变函数之全体记为 $V_E[a，b]$。

若 E＝R（R 为实数），则 $V_E[a，b]$即为实函数中的囿变函数（有界变差函数）的全体。

定义 2：设 F：[a, b]→E，如果对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当$\{(a_v，b_v)\}$是[a，b]上任一族有限个互不相交的开区间，其总长度：

$$\sum_{v=1}^{m}(b_v-a_v)<\delta \text{ 时，不等式：}$$

---

* 收稿日期：1989.09.04

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{v=1}^{m}\|F(b_v)-F(a_v)\|_1<\varepsilon \text{ 成立}$$

那么称 F 是[a，b]上的绝对连续函数。用 G_E 表示[a，b]上绝对连续函数的全体。

显然，若 E＝R 时，G_E[a, b]即为实函数中绝对连续函数之全体。

在上述定义之下，囿变函数（绝对连续函数）与实函数中囿变函数（绝对连续函数）有着许多类似的性质及结论，证明可仿实函数中相应结论的证明。为讨论本文主要内容，在此就不在赘述了，仅以引理的形式给出证明下节定理1、定理2时所需要用到的几个结论。

引理1：设 α，β 为二常数：

i＞ 若 $f\in V_E[a,b]$，$g\in V_E[a,b]$，则 $\alpha f+\beta g\in V_E[a,b]$，且 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f+\beta g)\leqslant|\alpha|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+|\beta|\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$；

ii＞ 若 $f\in G_E[a,b]$，$g\in G_E[a,b]$，则 $\alpha f+\beta g\in G_E[a,b]$。

引理2：若 $\overset{b}{\underset{a}{V}}=0$，则 f 为常映射。

引理3：若 $f\in G_E[a,b]$，则必有 $f\in V_E[a,b]$。

下面给出本文的主要结果。

2　定理及其证明

定理1：在 $V_E[a,b]$ 上定义范数：$\|f\|=\|f(a)\|_1+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$　　(＊)

则 $V_E[a,b]$ 构成一 Banach 空间。

证明：先证 $\|\cdot\|$ 满足范数公理。

i＞ $\|f\|>0$ 及 $\|\alpha f\|=|\alpha|\,\|f\|$ 显然成立；

ii＞ $\|f\|=0\Longleftrightarrow f(a)=\theta$ 且 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0\overset{\text{引理2}}{\Longleftrightarrow}f(x)\equiv\theta$（其中 θ 为 E 中零元）；

iii＞ $\|f+g\|=\|f(a)+g(a)\|_1+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g)$

$$\overset{\text{引理1}}{\leqslant}\|f(a)\|_1+\|g(a)\|_1+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)=\|f\|+\|g\|$$

再由引理1知：$V_E[a,b]$ 为一赋范线性空间。

下证其完备性。

设 $\{f_n\}$ 是 $V_E[a,b]$ 中任一基本列，即对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N\in IN$（IN 为自然数集），当 n，m＞N 时，有：

$$\|f_m(a)-f_n(a)\|_1+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_m-f_n)<\varepsilon$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

从而对每一$x\in[a, b]$，有：$\bigvee_a^b(f_m - f_n) \geqslant V_{f_m - f_n}(a, x, b)$

$$= \|f_m(x) - f_n(x) - f_m(a) + f_n(a)\|_1 + \|f_m(a) - f_n(b) - f_m(x) + f_n(x)\|_1$$

$$\geqslant \|f_m(x) - f_n(x)\|_1 - \|f_m(a) - f_n(a)\|_1$$

故当$m, n \geqslant N$时，$\|f_m(x) - f_n(x)\|_1 \leqslant \|f_m(a) - f_n(a)\|_1 + \bigvee_a^b(f_m - f_n) < \varepsilon$

从而对每一$x \in [a, b]$，$\{f_n(x)\}$为E中基本列。因E为Banach空间，故$\{f_n(x)\}$收敛。设

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$，$x \in [a, b]$.

又因为对每一$x \in [a, b]$，当$m, n > N$时，$\| f_m(x) - f_n(x) \|_1 < \varepsilon$。固定n，令$m \to +\infty$，便得$\| f(x) - f_n(x) \|_1 < \varepsilon$，从而：

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{一致}} f(x) \qquad x\in[a, b]$$

又由$\{f_n\}$为基本列知，$\{f_n\}$有界，即存在$M > 0$，使得$\| f_n \| < M$ $(n \in IN)$，故：

$$\bigvee_a^b(f_n) \leqslant M \qquad (n\in IN)$$

对$[a, b]$上任意一组分点：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，当分点取定后，由于：

$$V_f(x_0, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \lim_{n\to\infty} \|f_m(x_i) - f_m(x_{i-1})\|_1$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \|f_m(x_i) - f_m(x_{i-1})\|_1 \leqslant M$$

所以：$f\in V_E[a, b]$。

最后再证：$\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。

由于$n, m \geqslant N$时，$\|f_m(a) - f_n(a)\|_1 + \sum_{i=1}^{K} \|f_m(t_i) - f_n(t_i) - f_m(t_{i-1}) + f_n(t_{i-1})\|_1$

$$\leqslant \|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

对一切划分△：$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$皆成立。

上式固定$n \geqslant N$，令$m \to \infty$得：

$$\|f(a) - f_n(a)\|_1 + \sum_{i=1}^{K} \|f(t_i) - f_n(t_i) - f(t_{i-1}) + f_n(t_{i-1})\| \leqslant \varepsilon$$

故：$\|f(a) - f_n(a)\|_1 + \bigvee_a^b(f - f_n) \leqslant \varepsilon$

亦即当$n \geqslant N$时有：$\|f - f_n\| \leqslant \varepsilon$

所以，$\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。

综上所述，便知（$V_E[a, b]$，$\|\cdot\|$）为Babach空间。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理2: 在$G_E[a,b]$上规定范数: $\|g\|=\|g(a)\|_1+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$ 则$G_E[a,b]$为Banach空间。

证明: 由定理1及引理1知, $G_E[a,b]$为赋范线性空间。下证其完备性。

设$\{g_n\}$为$G_E[a,b]$上的基本列, 由引理3知$\{g_n\}$为$V_E[a,b]$上的基本列, 由定理1的证明可知, 存在$g\in V_E[a,b]$, 使得:

$$g_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{一致}}g(x)\quad \text{且}\quad \|g_n-g\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

所以: $\forall\varepsilon>0$, 存在$N\in \mathbb{N}$, 当$n>N$时, $\|g_n-g\|<\varepsilon/2$, 故$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g_N-g)<\varepsilon/2$。

由$g_N\in G_E[a,b]$知, 对上述$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$\{(a_v,b_v)\}$为$[a,b]$上任一有限开区间族, 其总长度$\sum\limits_{j=1}^{m}(b_v-a_v)<\delta$时, 总有: $\sum\limits_{v=1}^{m}\|g_N(b_v)-g(a_v)\|_1<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned}\text{所以:}\ \sum_{v=1}^{m}\|g(b_v)-g(a_v)\|_1&\leqslant\sum_{v=1}^{m}\|g_N(b_v)-g_N(a_v)\|_1\\&+\sum_{v=1}^{m}\|g_N(b_v)-g(b_v)-g_N(a_v)+g(a_v)\|_1\\&\leqslant\sum_{v=1}^{m}\|g_N(b_v)-g_N(a_v)\|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g_N-g)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

故$g\in G_E[a,b]$。又$\|g_n-g\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, 从而$G_E[a,b]$完备。所以 ($G_E[a,b]$, $\|\cdot\|$) 为Banach空间。由定理1和定理2有:

推论: 若囿变函数按(*)定义范数, 则绝对连续函数必为其闭子空间。

参　考　文　献

〔1〕夏道行. 实变函数与泛函分析. 人民教育出版社, 1979

〔2〕王声望, 郑维行. 实变函数与泛函分析概要. 人民教育出版社, 1980

〔3〕定光桂. Banach空间引论. 科学出版社

On Two Important Results About Bounded Variation Function and Complete Continuous Function Mapping into Banach Space

Xu Jianguo

(ZhengZhou Institute of Technology)

Abstract: The conclusion that bounded variation function and complete continuous function mapping into Banach space are both Banach space is given in this paper.

Keywords: bounded variation function, complete continuous function, Banach space, norm

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net