第11卷 第2期 郑州工学院学报 Vol.11 No.2
1990年 6月 Journal of ZhengZhou Institute of Technology Jun. 1990

带非线性存储的半线性抛物型方程解的 blow-up*

王书彬

(郑州工学院数理力学系)

摘 要: 本文利用凸性方法对带非线性存储的半线性抛物型方程的非线性初边值问题:

$$\begin{cases} u_t = \triangle u + \int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau + g(u) & \text{in}\Omega \times (0,\infty) \\ \beta\frac{\partial u}{\partial v} + u = \varphi(u) & \text{on}\partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \bar{\Omega} \end{cases}$$

给出了解发生 *blow-up* 现象的两个充分条件，推广了文献[2]、[3]中的某些结果。

关键词: *blow-up* 现象，非线性存储，凸性方法

非线性抛物型方程解的 blow-up 现象是一种重要的渐近性质，对它的研究具有很重要的意义。文献[1]–[3]分别研究了线性方程非线性初边值问题，半线性方程的线性初边值问题和半线性方程的非线性初边值问题的 blow-up 现象，文献[4]研究了带非线性存储的抛物型方程的混合问题:

$$\begin{cases} u_t = \triangle u + \int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau + g(x) & \text{in}\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{on}\partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \bar{\Omega} \end{cases}$$

的解的 blow-up 现象。

本文将考虑带非线性存储的半线性抛物型方程的非线性初边值问题:

$$P(1)\begin{cases} u_t = \triangle u + \int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau + g(u) & \text{in}\Omega \times (0,T) \\ \beta\frac{\partial u}{\partial v} + u = \varphi(u) & \text{on}\partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \bar{\Omega} \end{cases}$$

其中 Ω 是 R^n 中的有界区域并且边界 $\partial\Omega$ 适当光滑，$\frac{\partial u}{\partial v}$为 u 在 $\partial\Omega$ 上的外法向导数，$m(s)$，$f(s)$，$g(s)$，$\varphi(s)$均为实值函数，$\beta>0$ 为常数。

---

* 收稿日期: 1988.11.04

在第一节中证明了在一定条件下问题P(1)的光滑解 $u(x, t)$ 及 $u_t(x, t)$ 的非负性；第二节利用"凸性引理"给出了解发生 blow-up 现象的两个充分条件，并指出了文献[3]的某些结果是本文的特例。

1　基本假定和基本引理

在本文中我们假定有条件:

(d_0): $m(s)\in C^1(R^+)$, $m(s)>0$, $m'(s)\leqslant 0$, $\int_0^\infty m(s)dS=M<+\infty$

$f(u)\geqslant 0$, $f'(u)\geqslant 0$, $g(s)\in C^1(R)$, $g(s)\geqslant 0$

引理1: 在假定条件 (d_0) 下，假设 $u_0(x)>0$，$\varphi(u)>0$，则问题P(1)的光滑解 $u(x, t)>0$，$(x, t)\in\bar{\Omega}\times[0, T]$。

证明: 作代换 $u(x, t)=e^{-\alpha t}v(x, t)$，$\alpha$ 为常数，则 $v(x, t)$ 满足:

$$P(2)\begin{cases} v_t-\triangle v=\alpha v+e^{\alpha t}\int_0^t m(t-\tau)f(u(x, \tau))d\tau+e^{\alpha t}g(u) \\ (\beta\frac{\partial v}{\partial\nu}+v)_{\partial\Omega}=e^{\alpha t}\varphi(u) \\ u(x, 0)=u_0(x) \end{cases}$$

如果 $u(x, t)$ 在 $\Omega\times(0, T]$ 内有负值，则 $v(x, t)$ 在 $\Omega\times(0, T]$ 内也有负值，必存在 $(x_0, t_0)\in\Omega\times(0, T]$ 使 $v(x, t)$ 在此点达到负的最小值，于是:

$$v_t(x_0, t_0)\leqslant 0, \qquad \triangle v(x_0, t_0)\geqslant 0$$

从而有:

$$(v_t-\triangle v)(x_0, t_0)\leqslant 0 \tag{1}$$

但是当我们取 $\alpha<0$ 时，在点 (x_0, t_0) 处:

$$\alpha v+e^{\alpha t}\int_0^t m(t-\tau)f(u(x, \tau))d\tau+e^{\alpha t}g(u)>0$$

这和(1)矛盾，因此可知 $u(x, t)$ 在 $\Omega\times(0, T]$ 内没有负值，亦即:

$$u(x, t)\geqslant 0, \qquad (x, t)\in\Omega\times(0, T]$$

对于 $v|_{\partial\Omega}=(e^{\alpha t}\varphi(u)-\beta\frac{\partial v}{\partial\nu})_{\partial\Omega}$，

利用抛物型方程的强极值原理知 $v|_{\partial\Omega}\geqslant 0$，也即:

$$u(x, t)\geqslant 0, \qquad (x, t)\in\partial\Omega\times(0, T]$$

当 $t=0$ 时，$u(x, 0)=v(x, 0)=u_0(x)\geqslant 0$。

总之我们有:

$$u(x, t)\geqslant 0, \qquad (x, t)\in\bar{\Omega}\times[0, T]$$

引理1证毕

引理2: 在假定条件 (d_0) 成立下再假设:

$g(u_0)+\triangle u_0>0$, $\forall x\in\Omega$

$1-\varphi'(u)>0$

及联接条件：$u_t(x,0)=\triangle u_0+g(u_0)$

则问题P(1)的光滑解 $u(x,t)$ 满足：

$$u_t(x,t)\geqslant 0,\quad (x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,T]$$

证明：令 $v(x,t)=u_t(x,t)$，则 $v(x,t)$ 满足：

$$\begin{cases} v_t-\triangle v=m(0)f(u(x,t))+\int_0^t m'(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau+g'(u)v \\ (\beta\frac{\partial v}{\partial\nu}+v)_{\partial\Omega}=\varphi'(u)v \\ v(x,0)=\triangle u_0+g(u_0) \end{cases}$$

再作代换 $v(x,t)=e^{rt}w(x,t)$，r为常数，则 $w(x,t)$ 满足问题：

$$P(3)\begin{cases} w_t-\triangle w=(-r+g'(u))w+e^{-rt}[m(0)f(u(x,t)+\int_0^t m'(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau] \\ (\beta\frac{\partial w}{\partial\nu}+w)_{\partial\Omega}=\varphi'(u)w \\ w(x,0)=\triangle u_0+g(u_0) \end{cases}$$

对问题$P(3)$，令 $\bar{K}=\sup\limits_{\Omega\times[0,T]}u(x,t)$，$\bar{\bar{K}}=\sup\limits_{0\leqslant S\leqslant K}g'(S)$，并注意到：

$$\begin{aligned} & m(0)f(u)+\int_0^t m'(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau \\ &=m(t)f(u_0)+\int_0^t m(t-\tau)\frac{\partial f(u(x,\tau))}{\partial\tau}d\tau \\ &\geqslant m(t)f(u_0)+m(t)\int_0^t\frac{\partial f(u(x,\tau))}{\partial\tau}d\tau \\ &=m(t)f(u)\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2}$$

当取 $r=\bar{K}+1$ 时，类似于引理1可以证明：

$$w(x,t)\geqslant 0,\quad (x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,T]$$

因此可知：

$$u_t(x,t)\geqslant 0,\quad (x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,T]$$

引理2证毕

附注1：在引理1和引理2的条件下对于边界条件 $\frac{\partial u}{\partial\nu}=0$ 结论仍然正确，它可以利用强极值原理来证明。

引理3[5]：〔凸性引理〕假设 $I(t)\in C^2[0,T]$，$I(t)>0$，$I'(0)>0$，并适合：

$$I(t)I''(t)-(1+\alpha)(I'(t))^2>0,\quad t\in[0,T],\quad \alpha>0$$

则：$T<I(0)/\alpha I'(0)$

证明：注意到：

$$(I(t)^{-\alpha})''=-\alpha I(t)^{-\alpha-2}(I(t)I''(t)-(\alpha+1)(I'(t))^2)\leqslant 0$$

故知 $F(t)=I(t)^{-\alpha}$ 在$[0,T]$上为凹函数，由数学分析知识可知凹函数图象总在它任意点切线

的下方，特别地在 $t=0$ 处切线之下，从而有：

$$F(t) \leqslant F(0) + F'(0)t$$

$$I(t)^{-\alpha} \leqslant I(0)^{-\alpha} - \alpha t I'(0) I(0)^{-\alpha-1}$$

即：
$$I(t)^{\alpha} \geqslant I^{\alpha+1}(0)(I(0) - \alpha t I'(0))^{-1}$$

当 $t \to I(0)/\alpha I'(0)$ 时，$F(t) \to \infty$，故知 $T < I(0)/\alpha I'(0)$。

引理 3 证毕

2　问题 P(1)解发生 blow-up 的条件

本节我们给出问题 P(1)的光滑解发生 blow-up 现象的两个充分条件。

定理 1：在条件 (d_0) 成立下再假设：

(d_1)　$u_0(x) > 0$，$u_0(x) \neq 0$，$\varphi(u) > 0$，$\varphi'(u) < 1$，

$\triangle u_0 + g(u_0) > 0$

(d_2) 存在常数 $Rl > 2$ 使得：

$ug'(u) - (l-1)(g(u) + Mf(u)) > 0$

$u\varphi'(u) - (l-1)\varphi(u) + (l-2)u > 0$

则问题 P(1)没有光滑整体解，即如果有光滑解 $u(x, t)$，那么存在 T_0，$0 < T_0 < T^*$ 使得：

$$\lim_{t \to T_0^-} \sup_{x \in \Omega} u(x, t) = +\infty$$

其中：

$$T^* = \frac{1}{l-2} \int_\Omega u_0^l dx \Big/ \int_\Omega u_0^{l-1} (\triangle u_0 + g(u_0)) dx$$

证明：如果问题有光滑解，取 T_1 使 $T^* < T_1$。

记：$K = \sup_{\Omega \times [0, T_1]} u(x, t) < \infty$，由引理1和引理2知：

$$u(x, t) \geqslant 0, \quad u_t(x, t) \geqslant 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T_1]$$

构造辅助函数：

$$I(t) = \int_\Omega \frac{u^l}{l} dx, \qquad I(0) = \frac{1}{l} \int_\Omega u_0^l dx > 0$$

$$I'(t) = \int_\Omega u^{l-1} u_t dx, \qquad I'(0) = \int_\Omega u_0^{l-1} [\triangle u_0 + g(u_0)] dx > 0$$

$$I''(t) = \int_\Omega (l-1) u^{l-2} u_t^2 dx + \int_\Omega u^{l-1} u_{tt} dx$$

$$= 2\int_\Omega (l-1) u^{l-2} u_t^2 dx - \int_\Omega (l-1) u^{l-2} u_t [\triangle u + \int_0^t m(t-\tau) f(u(x, \tau)) d\tau + g(u)] dx$$

$$+ \int_\Omega u^{l-1} [\triangle u_t + m(0) f(u) + \int_0^t m'(t-\tau) f(u(x, \tau)) d\tau + g'(u) u_t] dx$$

$$= 2\int_\Omega (l-1) u^{l-2} u_t^2 dx + \int_\Omega (l-1) u^{l-2} \nabla u \cdot \nabla u_t dx$$

$$+\int_\Omega(l-1)(l-2)u^{l-3}u_t|\nabla u|^2dx-\int_{\partial\Omega}u^{l-2}u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}dS$$

$$-\int_\Omega(l-1)u^{l-2}u_t\int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\ \tau))d\tau dx-\int_\Omega(l-1)u^{l-2}u_t g(u)dx$$

$$-\int_\Omega(l-1)u^{l-2}\nabla u\cdot\nabla u_t dx+\int_{\partial\Omega}u^{l-1}\frac{\partial u_t}{\partial\nu}dS$$

$$+\int_\Omega u^{l-1}g'(u)u_t dx+\int_\Omega u^{l-1}[m(0)f(u)+\int_0^t m'(t-\tau)f(u(x,\ \tau))d\tau dx$$

$$=2\int_\Omega(l-1)u^{l-2}u_t^2dx+\int_\Omega(l-1)(l-2)u^{l-3}u_t|\nabla u|^2dx$$

$$+\int_\Omega u^{l-2}[u\frac{\partial u_t}{\partial\nu}-(l-1)u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}]dS$$

$$+\int_\Omega u^{l-2}u_t[ug'(u)-(l-1)g(u)-(l-1)\int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\ \tau))d\tau]dx$$

$$+\int_\Omega u^{l-1}[m(0)f(u)+\int_0^t m'(t-\tau)f(u(x,\ \tau))d\tau]dx \tag{3}$$

由假设可知:

$$[u\frac{\partial u_t}{\partial\nu}-(l-1)u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}]_{\partial\Omega}=\{\frac{1}{\beta}u[\varphi'(u)u_t-u_t]+\frac{(l-1)}{\beta}u_t[\varphi(u)-u]\}_{\partial\Omega}$$

$$=\frac{1}{\beta}u_t[\varphi'(u)u-(l-1)\varphi(u)+(l-2)u]_{\partial\Omega}\geqslant 0 \tag{4}$$

$$ug'(u)-(l-1)g(u)-(l-1)\int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\ \tau))d\tau$$

$$\geqslant ug'(u)-(l-1)g(u)-(l-1)f(u)\int_0^t m(t-\tau)d\tau$$

$$\geqslant ug'(u)-(l-1)g(u)-(l-1)Mf(u)\geqslant 0 \tag{5}$$

将(4)式和(5)式代入(3)并注意到(2)式即得:

$$I''(t)\geqslant 2\int_\Omega(l-1)u^{l-2}u_t^2dx$$

所以:

$$I(t)I''(t)\geqslant\frac{2(l-1)}{l}\int_\Omega u^l dx\int_\Omega u^{l-2}u_t^2dx$$

$$\geqslant\frac{2(l-1)}{l}[\int_\Omega u^{l-1}u_t dx]^2$$

$$=\frac{2(l-1)}{l}[I'(t)]^2$$

即: $I(t)I''(t)-\frac{2(l-1)}{l}[I'(t)]^2\geqslant 0$

取: $\alpha=\frac{l-2}{l}$ 则: $\alpha+1=\frac{2(l-1)}{l}$

利用引理3可知存在$T_0>0$使得:

$$T_0 \leqslant \frac{I(0)}{\alpha I'(0)} = \frac{1}{l-2}\int_\Omega u_0^l dx \Big/ \int_\Omega u_0^{l-1}[\triangle u_0 + g(u_0)]dx \ \triangleq\ T^*$$

当 $t \to T_0^-$ 时，$I(t) \to +\infty$，

因此有:

$$\lim_{t\to T_0^-} \sup_{x\in\bar{\Omega}} u(x,t) = +\infty$$

定理 1 证毕

附注 2: 定理 1 中我们假定了条件:

$$ug'(u) - (l-1)(g(u) + Mf(u)) \geqslant 0 \tag{6}$$

如果 $f(u)$，$g(u)$是多项式时是非常容易验证的，但是如果 $f(u)$和 $g(u)$是指数形式时这个条件使用起来就不太方便，例如取 $f(u)=g(u)=\lambda(c^{au}-b)$，其中 λ、a、b 为正常数，那么(6)式相当于:

$$auc^{au}-(l-1)(M+1)(c^{au}-b)>0$$

除非知道 u 的变化范围这个条件是很难验证的。为此下面针对源函数为未知函数的指数形式的情况给出 P(1)的解发生 blow-up 现象的条件。

定理 2: 在成立条件 (d_0) 的情况下，再假设:

(d_1')　$u_0(x)>0$,　$\varphi(u)>0$,　$\varphi'(u)<1$,　$\triangle u_0+g(u_0)>0$

(d_2') 存在一个常数 $\alpha>0$ 使得:

$$g'(u)-\alpha[g(u)+Mf(u))>0$$

$$\varphi'(u)-\alpha\varphi(u)+\alpha u-1>0$$

则问题 P(1)没有光滑整体解，即若有光滑解，那么必存在 T_0，$0<T_0<T^*$ 使得:

$$\lim_{t\to T_0^-} \sup_{x\in\bar{\Omega}} u(x,t) = +\infty$$

其中:

$$T^* = \frac{1}{\alpha}\int_\Omega c^{\alpha u_0} dx \Big/ \int_\Omega c^{\alpha u_0}(\triangle u_0 + g(u_0))dx$$

证明: 如果问题 $P(1)$有光滑解，取 T_1，$T^* < T_1$。

记 $K = \sup\limits_{\bar{\Omega}\times[0,T_1]} u(x,t) < +\infty$，由引理1和引理2知:

$$u(x,t) \geqslant 0, \quad u_t(x,t) \geqslant 0, \quad (x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,T_1]$$

作辅助函数:

$$I(t) = \frac{1}{\alpha}\int_\Omega c^{\alpha u}dx, \qquad I(0) = \frac{1}{\alpha}\int_\Omega c^{\alpha u_0}dx > 0$$

$$I'(t) = \int_\Omega c^{\alpha u}u_t dx, \qquad I'(0) = \int_\Omega c^{\alpha u_0}[\triangle u_0 + g(u_0)]dx > 0$$

$$I''(t) = \int_\Omega \alpha c^{\alpha u}u_t^2 dx + \int_\Omega c^{\alpha u}u_{tt}dx$$

$$= 2\int_{\Omega}\alpha e^{\alpha u}u_t^2dx - \int_{\Omega}\alpha e^{\alpha u}u_t[\triangle u + \int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau + g(u)]dx$$

$$+ \int_{\Omega}e^{\alpha u}[\triangle u_t + m(0)f(u) + \int_0^t m'(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau + g'(u)u_t]dx$$

$$= 2\int_{\Omega}\alpha e^{\alpha u}u_t^2dx + \alpha^2\int_{\Omega}e^{\alpha u}u_t|\nabla u|^2dx + \int_{\partial\Omega}e^{\alpha u}[\frac{\partial u_t}{\partial\nu} - \alpha u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}]dS$$

$$+ \int_{\Omega}e^{\alpha u}u_t[g'(u) - \alpha g(u) - \alpha\int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau dx$$

$$+ \int_{\Omega}e^{\alpha u}[m(0)f(u) + \int_0^t m'(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau]dx \tag{7}$$

由假设条件可知:

$$[\frac{\partial u_t}{\partial\nu} - \alpha u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}]_{\partial\Omega} = \frac{1}{\beta}[\varphi'(u)u_t - u_t]_{\partial\Omega} - \alpha u_t\frac{1}{\beta}[\varphi(u) - u]_{\partial\Omega}$$

$$= \frac{1}{\beta}u_t[\varphi'(u) - \alpha\varphi(u) + \alpha u - 1]_{\partial\Omega} \geqslant 0 \tag{8}$$

$$g'(u) - \alpha g(u) - \alpha\int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau$$

$$\geqslant g'(u) - \alpha g(u) - \alpha Mf(u) \geqslant 0 \tag{9}$$

将式(8)、(9)及(2)代入式(7)得到:

$$I''(t) \geqslant 2\int_{\Omega}\alpha e^{\alpha u}u_t^2dx$$

从而知:

$$I(t)I''(t) \geqslant 2\int_{\Omega}e^{\alpha u}dx\int_{\Omega}e^{\alpha u}u_t^2dx$$

$$\geqslant 2[\int_{\Omega}e^{\alpha u}u_tdx]^2 \geqslant 2[I'(t)]^2$$

即: $I(t)I''(t) - 2[I'(t)]^2 \geqslant 0$

利用引理3可知存在$T_0 > 0$使得:

$$T_0 \leqslant \frac{I(0)}{I'(0)} = \frac{1}{\alpha}\int_{\Omega}e_0^{\alpha u}\ dx \Big/ \int_{\Omega}e^{\alpha u_0}(\triangle u_0 + g(u_0))]dx \triangleq T^*$$

成立:

$$\overline{\lim_{t\to T_0^-}}\ I(t) = +\infty$$

亦即:

$$\lim_{t\to T_0^-}\ \sup_{x\in\bar{\Omega}}\ u(x,t) = +\infty$$

定理2证毕

附注3: 当 $f(u)\equiv 0$ 时定理1和定理2就变为文献[3]中的定理1和定理3, 因此说文献[3]的结果是本文结果的特例。

附注4: 本文的结果可以推广到更一般的问题:

$$\begin{cases} u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau + g(u) & \text{in}\Omega\times(0,T) \\ \beta\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}v_j + u = \varphi(u) & \text{on}\partial\Omega\times(0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \overline{\Omega} \end{cases}$$

其中: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$是x的适当光滑的函数, 并且满足:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \qquad \forall 0\neq\xi\in R^n, \quad \mu>0$$

$v=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$是外法向方向。

参 考 文 献

〔1〕 H.A.Levine and L.E.Payne. Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time, J.Diff.Equa. 1974, 16: 319-334

〔2〕 管志成. 一类非线性抛物型方程解的blow-up. 数学年刊. 5A(2) 1984, 177-180

〔3〕 谢春红, 王绳俊. 一类半线性抛物型方解的blow-up. 南京大学学报(自然科学版). 1983, 3: 396-409

〔4〕 H.Bellout. Blow-up of solutions of parabolic equations with nonlinear memory. J.Diff.Equ. 1987, 70: 42-68

〔5〕 陈宏伟. 半线性抛物方程及方程组的爆破问题. 数学物理学报. 1986, 6(1): 13-22

Blow-up of Solutions of Semilinear Parabolic Equations with Nonlinear Memory

Wang Shubin

(ZhengZhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper we consider the initial boundary value problem of parabolic equations with nonlinear memory:

$$\begin{cases} u_t = \triangle u + \int_0^t m(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau + g(u) & \text{in}\Omega\times(0,\infty) \\ \beta\frac{\partial u}{\partial v} + u = \varphi(u) & \text{on}\partial\Omega\times(0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \overline{\Omega} \end{cases}$$

and given two sufficient condition for blow-up of solutions of this problem by a convexity method.

Keywords: Blow-up of solutions, Nonlinear memory, Convexity method