

# 局部钢丝缠绕筒体的力学分析\*

魏新利

(郑州工学院化工系)

**摘 要:** 本文将局部预应力钢丝缠绕的长筒体划分为预紧状态、内压状态和工作状态,进行了应力及变形的分析,得到了这三种状态不同的解,并对预紧状态进行了实验应力测试,其结果与计算值吻合较好。本文提供的分析计算方法,可供工程绕丝止裂设计参考。

**关键词:** 筒体, 绕丝, 止裂

筒体经预应力钢丝缠绕后,一方面在筒体内产生一预压应力,另一方面在内压升起后,还要产生一背压,从而提高了承载能力。即在同样内压作用下,使筒体的周向应力水平大大降低。对含轴向或准轴向裂纹的筒体,在进行局部预应力钢丝缠绕后,处于裂纹上方的钢丝还将对裂纹的张开和外鼓趋势具有局部约束作用。这样通过绕丝的手段,可以使一含裂纹(缺陷)的筒体(容器或管道)达到止裂的目的。为了进行绕丝止裂的设计计算,必须进行有关的力学分析。

早在1959年,杨芳毓等人<sup>[1]</sup>就曾进行过绕丝高压容器的设计、制造和试验;1968年J.E.Bowcr<sup>[2]</sup>也进行了绕丝容器的试验;1983年顾宗义、刘炳生<sup>[3]</sup>对预应力绕丝超高压容器进行了理论计算和实验分析。以上的理论分析均没有考虑绕丝边缘的影响。1978年颜永年<sup>[4][5]</sup>曾分析了包括端部影响在内的绕丝容器问题,但实验数据很少,且把绕丝段视为无限长。

本文在前人的基础上对长筒体局部绕丝后的应力及变形进行分析,为容器或管道的绕丝止裂提供力学分析基础。

## 1 力学分析

为便于分析把局部绕丝筒体划分为三种状态:

预紧状态: 绕丝后未加内压时的状态;

内压状态: 仅有内压作用时的状态;

工作状态: 预紧与内压状态的迭加;

---

\* 收稿日期: 1989.07.04

考虑到对称性, 采用图 1 的力学模型, 并作如下假设:

- ① 钢丝无轴向抗弯作用, 不承受轴向力。
- ② 筒体视为薄壁, 忽略径向应力。
- ③ 钢丝与筒体间无滑动, 即径向位移或周向应变是连续的, 二者弹性模量相同。

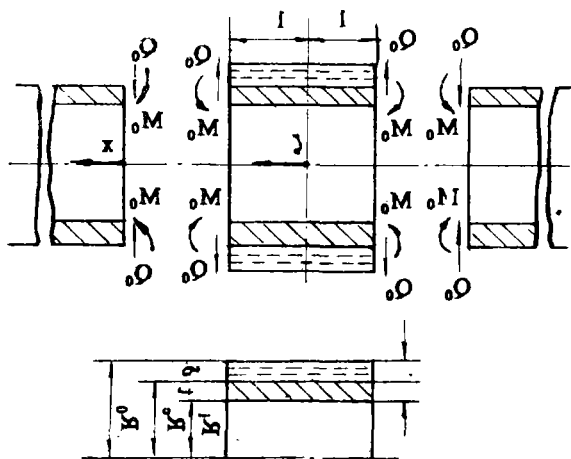


图 1

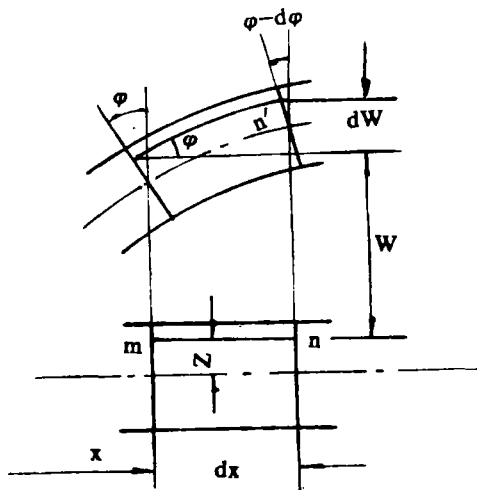


图 2

### 1.1 弯曲微分方程

轴向及环向应变和应力或内力分别为 (参见图 2):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 - Z \frac{d^2 W}{dx^2}; \quad \varepsilon_t = \frac{W}{R + Z}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \varepsilon_0 - Z \frac{d^2 W}{dx^2} + \nu \frac{W}{R + Z} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{W}{R + Z} + \nu \varepsilon_0 - \nu Z \frac{d^2 W}{dx^2} \right)$$

$$\text{或: } N_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (t \varepsilon_0 + \nu \ln K_1 W); \quad N_t = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu t \varepsilon_0 + \ln K_1 W)$$

消去  $\varepsilon_0$  可得:  $N_t - \nu N_x = E \ln K_1 W$

其中:  $\varepsilon_0$  为中面应变,  $W$  为径向位移,  $\nu$  为材料泊松比,  $R$  为筒体中面半径,  $\delta$  为绕丝层厚度,  $t$  为筒体壁厚,  $K_1 = \frac{R_c}{R_i}$ 。

在法向载荷作用下, 圆柱薄壳的平衡方程为<sup>(6)</sup>:

$$\frac{d}{dx} [(R - W) N_x] = 0$$

$$\frac{d}{dx} [(R - W) Q_x] - N_t + (R - W) P = 0$$

$$\frac{d}{dx} [(R-W)M_x] - (R-W)Q_x = 0$$

式中  $R$  表示筒体的中面半径;  $N_x$ 、 $N_t$ 、 $M_x$  和  $Q_x$  分别表示  $x$  截面处单位圆周上的轴向内力、环向内力、弯曲内力和剪切内力。

联立以上各方程, 并作适当简化, 可得出筒体的弯曲微分方程:

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + 4W = \frac{1}{D\beta_1^4} (P_i - \frac{\nu}{R} N_x) \quad (1)$$

其中:

$$\beta_1^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{Rt^3} \ln K_1; \quad \xi = \beta_1 x; \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

在预紧状态下, 由于钢丝预紧力的作用, 绕丝结束后, 钢丝层对筒体的接触压与筒体的收缩量有关, 收缩量越大, 接触压越小; 反之越大。设均匀收缩时, 钢丝层对筒体的接触压为  $P_{dm}$ , 其收缩量为  $W_p$ 。由于边缘影响, 实际收缩量为  $W$ , 则收缩量的改变为  $\Delta W = W_p - W$ 。

由物理和平衡方程得出接触压的改变量为:

$$\Delta P = \frac{E \ln K_2}{R_s} \cdot \Delta W$$

若为等张力缠绕, 由[1]知产生的均匀背压为:

$$P_{dm} = \frac{\sigma_w}{2} \cdot \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \ln \frac{K^2 - 1}{K_1^2 - 1}$$

其中  $R_s$  为钢丝层中面半径,  $K_2 = \frac{R_0}{R_c}$ ,  $K = K_1 \cdot K_2$ ,  $R_i$ 、 $R_c$ 、 $R_0$  见图 1d,  $\sigma_w$  为钢丝预紧应力。

其均匀收缩量为:

$$W_p = \frac{R^2}{Et} (P_{dm} + \frac{\nu}{R} N_x)$$

则实际接触压  $P_d$  为:

$$P_d = P_{dm} - \Delta P = \frac{\sigma_w}{2} \cdot \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \ln \frac{K^2 - 1}{K_1^2 - 1} \cdot \left( \frac{R_s t + R^2 \ln K_2}{R_s t} \right) + \frac{E \ln K_2}{R_s} \cdot W + \nu \frac{R \ln K_2}{R_s t} N_x$$

把(1)式中的  $P_i$  用  $(-P_d)$  代替, 即可得出预紧状态下的弯曲微分方程:

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + 4W = -\frac{A\sigma_w}{D\beta^4} - \frac{\nu}{4\beta^4} \left( \frac{1}{R} + \frac{\delta R}{tR_s^2} \right) \cdot N_x \quad (2a)$$

一般预紧状态  $N_x \approx 0$ , 此时方程成为:

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + 4W = -\frac{A\sigma_w}{D\beta^4} \quad (2b)$$

其中

$$\xi = \beta x$$

$$A = \frac{K_1^2 - 1}{2K_1^2} \ln \frac{K^2 - 1}{K_1^2 - 1} \cdot \left( \frac{R_s t + R^2 \ln K_2}{R_s t} \right)$$

$$\beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{t^3} \left( \frac{\ln K_1}{R} + \frac{\ln K_2}{R_s} \right)$$

在内压状态下, 由于内压作用, 在交界处产生的接触压  $P_c$  为:

$$P_c = P_{cm} - \Delta P$$

这时径向位移越大, 背压越大; 反之越小 ( $P_{cm}$  为由  $P_i$  产生的均匀接触压)。

根据假设③得均匀接触压为:

$$P_{cm} = \frac{P_i \delta R^2}{\delta R^2 + t R_s^2} - \frac{\nu R \delta}{\delta R^2 + t R_s^2} \cdot N_x$$

均匀扩张量为:

$$W_d = \frac{1}{E} \left( \frac{R_s^2 R^2}{\delta R^2 + t R_s^2} P_i - \frac{\nu R_s^2 R}{\delta R^2 + t R_s^2} N_x \right)$$

故:

$$P_c = \frac{(\delta - R_s \ln K_2) R^2}{\delta R^2 + t R_s^2} P_i - \frac{(\delta - R_s \ln K_2) \cdot \nu R}{\delta R^2 + t R_s^2} N_x + \frac{E \ln K_2}{R_s} \cdot W$$

用  $(P_i - P_c)$  代替(1)式中的  $P_i$ , 并视绕丝层为薄壁筒, 即  $\delta - R_s \ln K_2 \approx 0$ , 得内压状态下的弯曲微分方程为:

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + 4W = \frac{1}{D\beta^4} \left( P_i - \frac{\nu}{R} N_x \right) \quad (3)$$

## 1.2 弯曲微分方程的解

在(1)、(2)、(3)式中均含有  $N_x$ , 由平衡方程的第一式得:

$$N_x = N_0 \left( 1 + \frac{W - W_0}{R - W} \right) = N_0 + \Delta N_x \quad (4)$$

$$\Delta N_x = N_0 \frac{W - W_0}{R - W} \approx N_0 \frac{\Delta W}{R}$$

$N_0$  为内压  $P_i$  作用下的轴向力,  $W_0$  为对应的径向位移。由于  $\Delta W/R$  与 1 相比是个微量, 故  $N_x \approx N_0 = \text{常数}$ 。所以在解弯曲微分方程时, 可先假设  $N_x$  为常数, 最后再估算  $\Delta N_x$  的大小。

这时, 弯曲微分方程的通解为:

$$W = c^{-\xi}(D_1 \cos \xi + D_2 \sin \xi) + c^{\xi}(D_3 \cos \xi + D_4 \sin \xi) + W^* \quad (5)$$

或:

$$W = C_1 \sin \xi \operatorname{Sh} \xi + C_2 \sin \xi \operatorname{Ch} \xi + C_3 \cos \xi \operatorname{Sh} \xi + C_4 \cos \xi \operatorname{Ch} \xi + W^* \quad (6)$$

(1)、(2)、(3)式的特解分别为:

$$W^* = \frac{1}{4D\beta_1^4} (P_i - \frac{\nu}{R} N_x)$$

$$W^* = -\frac{A\sigma_w}{4D\beta^4}$$

$$W^* = \frac{1}{4D\beta^4} (P_i - \frac{\nu}{R} N_x)$$

由平衡方程和物理方程可写出应力表达式:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{N_x}{t} - Z \frac{d^2 W}{dx^2} + \left( \frac{\nu}{R+Z} - \frac{\nu}{t} \ln K_1 \right) W \right] \quad (7a)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \nu \cdot \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{N_x}{t} - \nu Z \frac{d^2 W}{dx^2} + \left( \frac{1}{R+Z} - \frac{\nu^2}{t} \ln K_1 \right) W \right] \quad (7b)$$

若不考虑弯曲的影响, 并设  $R+Z \approx R$ ,  $W \approx W^*$ , 则上式成为:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{N_x}{t} + \left( \frac{\nu}{R} - \frac{\nu}{t} \ln K_1 \right) W^* \right] \quad (8a)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \nu \cdot \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{N_x}{t} + \left( \frac{1}{R} - \frac{\nu^2}{t} \ln K_1 \right) W^* \right] \quad (8b)$$

对薄壁筒:  $\ln K_1 \approx \frac{1}{R}$ , 则:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t}; \quad \sigma_t = \nu \frac{N_x}{t} + E \frac{W^*}{R}$$

上式即为通常的受压薄壁圆筒的应力计算公式。

### 1.2.1 半无限长筒体的解 (见图 1c):

由文献[7]可知其位移及内力分别为:

$$W = -\frac{M_0}{2D\beta_1^2} f_3 - \frac{Q_0}{2D\beta_1^3} f_4 + W^*$$

$$\theta_x = \frac{M_0}{D\beta_1} f_4 + \frac{Q_0}{2D\beta_1^2} f_1$$

$$M_x = M_0 f_1 + \frac{Q_0}{\beta_1} f_2$$

$$Q_x = Q_0 f_3 - 2\beta_1 M_0 f_2$$

四个特殊函数  $f_1$ 、 $f_2$ 、 $f_3$ 、 $f_4$  的值见文献[7]中表 20-1。由表可见, 当  $\xi$  充分大时, 四个函数都急剧减少, 表明弯曲内力是局部的。当  $\xi > \pi$  时, 每个特殊函数的绝对值都小于它的最大值的 5%。

当  $x$  大于  $2.0\sqrt{Rt}$  到  $2.5\sqrt{Rt}$  时, 弯曲内力影响已经很小。

### 1.2.2 绕丝段的解 (见图 1b)

利用对称性并将边界条件代入(6)式可求出位移及内力为:

$$W = C_1 f_5 + C_4 f_6 + W^*$$

$$\theta_\xi = \beta [C_1 (f_7 + f_8) + C_4 (f_8 - f_7)]$$

$$M_\xi = -2D\beta^2 (C_1 f_6 - C_4 f_5)$$

$$Q_\xi = -2D\beta^3 [(C_1 - C_4) f_8 - (C_1 + C_4) f_7]$$

其中:

$$f_5 = \sin \xi \operatorname{Sh} \xi; \quad f_6 = \cos \xi \operatorname{Ch} \xi;$$

$$f_7 = \sin \xi \operatorname{Ch} \xi; \quad f_8 = \cos \xi \operatorname{Sh} \xi;$$

其值见表 1, 由表 1 可见, 当  $\beta l > 3 \sim 5$  时,  $f_5 \approx f_7$ ,  $f_6 \approx f_8$ , 即  $\operatorname{Sh} \xi \approx \operatorname{Ch} \xi \approx \frac{e^\xi}{2}$ 。

$$C_1 = \frac{Q_0}{D\beta^3} \cdot \frac{\sin \beta l \operatorname{Sh} \beta l}{\operatorname{Sh} 2\beta l + \sin 2\beta l} - \frac{M_0}{D\beta^2} \cdot \frac{\cos \beta l \operatorname{Sh} \beta l + \sin \beta l \operatorname{Ch} \beta l}{\operatorname{Sh} 2\beta l + \sin 2\beta l}$$

$$C_2 = C_3 = 0$$

$$C_4 = \frac{Q_0}{D\beta^3} \cdot \frac{\cos \beta l \operatorname{Ch} \beta l}{\operatorname{Sh} 2\beta l + \sin 2\beta l} - \frac{M_0}{D\beta^2} \cdot \frac{\cos \beta l \operatorname{Sh} \beta l - \sin \beta l \operatorname{Ch} \beta l}{\operatorname{Sh} 2\beta l + \sin 2\beta l}$$

### 1.2.3 局部绕丝长筒体的解

由变形协调条件可求出  $Q_0$ 、 $M_0$ , 从而可得出  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $C_1$ 、 $C_4$ 。

当  $\beta l > 3 \sim 5$  时可得起解:

$$M_0 = \frac{2D(a-b)(W_2^* - W_1^*)}{2(a^3 + b^3) - (a+b)(a-b)^2}$$

$$Q_0 = \frac{2}{a-b} M_0$$

$$D_1 = -\frac{b^2(a+b)(W_2^* - W_1^*)}{2(a^3 + b^3) - (a+b)(a-b)^2}$$

$$D_2 = -\frac{a-b}{a+b} D_1$$

$$C_1 = \frac{1}{c^{\beta l}} (H \sin \beta l - J \cos \beta l) (W_2^* - W_1^*)$$

$$C_4 = \frac{1}{c^{\beta l}} (H \cos \beta l + J \sin \beta l) (W_2^* - W_1^*)$$

其中:

$$H = \frac{2a^2(a+b)}{2(a^3+b^3) - (a+b)(a-b)^2}$$

$$J = \frac{a-b}{a+b} \cdot H$$

$a = \frac{1}{\beta}$ ,  $b = \frac{1}{\beta_1}$ ,  $W_1^*$ ,  $W_2^*$  分别为绕丝段和非绕丝段的位移特解。

当  $\beta_1 > 3 \sim 5$  时,  $C_1 \approx C_4 \approx 0$ ,  $W \approx$  常数。

至此位移函数已求出, 代入(7)式即可求出应力。

## 2 预紧状态实验及其计算结果对比

实验是在一节筒体上进行的, 筒体壁厚为 6.5mm,  $R = 107.75\text{mm}$ , 筒体内壁每隔 15mm 贴了纵向、环向两个应变片, 共测了 20 个点。在外壁缠绕了 2 层钢丝, 钢丝直径 1.2mm, 钢丝预紧应力 94.75MPa, 绕丝长度 250mm, 每绕一层测一次, 理论计算值和实验值的对比见图 3 和图 4。

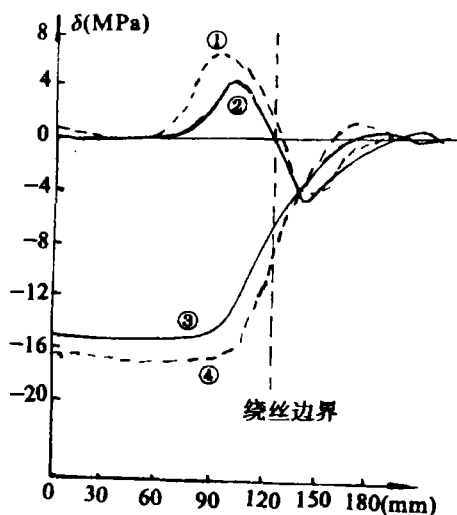


图3 预应力钢丝缠绕一层时实测应力与计算应力的比较

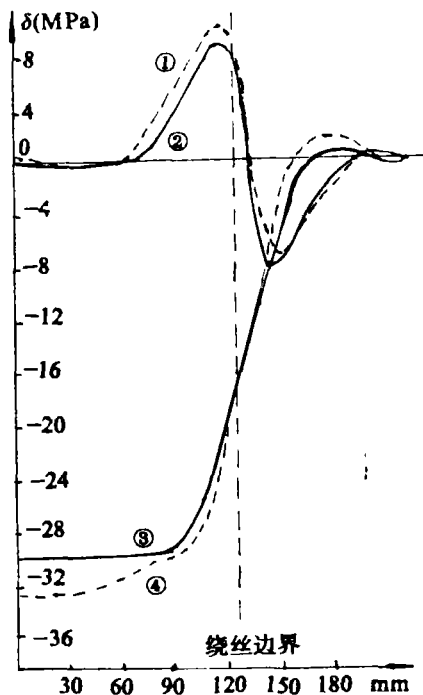


图4 预应力钢丝缠绕两层时实测应力与计算应力的比较

注: 曲线①-轴向应力实测值; 曲线②-轴向应力计算值; 曲线③-环向应力计算值; 曲线④-环向应力实测值。

### 3 结论与讨论

3.1 本文提供的分析计算方法与实测结果吻合较好, 可供工程绕丝止裂设计参考。

3.2 本文证明了, 在绕丝具有足够长度时, 用文献[1]、[2]、[3]的方法进行绕丝应力分析, 具有一定的可靠性。

3.3 从整个结果看, 计算值略小于实测值。其原因可能是由于实测所用的筒体外表面比较粗糙, 钢丝与筒体之间不可能绝对无滑动, 即筒体的周向“膨胀”或径向位移会略大些。

3.4 本实验仅绕了两层, 多层缠绕的计算精度如何, 有待于进一步的实验验证。

3.5 尽管内压状态和工作状态下的计算与预紧状态下的计算有着直接联系, 但在这两种状态下的计算精度如何, 尚需进一步的实验验证。

表1  $\beta_s < 4.0$  时特殊函数  $f_5$ 、 $f_6$ 、 $f_7$ 、 $f_8$  的值

$\beta_s$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$
0.0	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.0400	0.9997	0.2027	0.1973
0.4	0.1600	0.9957	0.4210	0.3783
0.6	0.3595	0.9784	0.6694	0.5255
0.8	0.6371	0.9318	0.9594	0.6187
1.0	0.9889	0.8337	1.2985	0.6350
1.2	1.4069	0.6561	1.6876	0.5470
1.4	1.8766	0.3656	2.1196	0.3237
1.6	2.3746	-0.0753	2.5764	-0.0694
1.8	2.8652	-0.7060	3.0262	-0.6685
2.0	3.2979	-1.5656	3.4210	-1.5093
2.2	3.6036	-2.6882	3.6931	-2.6230
2.4	3.6922	-4.0977	3.7535	-4.0307
2.6	3.4511	-5.8002	3.4894	-5.7366
2.8	2.7442	-7.7759	2.7646	-7.7186
3.0	1.4137	-9.9669	1.4208	-9.9176
3.2	-0.7148	-12.2657	-0.7172	-12.2250
3.4	-3.8243	-14.5007	-3.8328	-14.4685
3.6	-8.0917	-16.4221	-8.1038	-16.3976
3.8	-13.6685	-17.6874	-13.6822	-17.6697
4.0	-20.6531	-17.8499	-20.6669	-17.8379



## 参 考 文 献

- (1) 杨芳毓等. 钢丝式高压容器研究. 大连工学院学报, 1959年第1期
- (2) J.E.Bower. Pressure Tests of Cylindrical Pressure Vessels Reinforced With Steel Wire Wrapping. A S.M.E. paper 68-pvp-24
- (3) 顾宗义, 胡炳生. 预应力超高压容器的设计、制造和检验. 化工与通用机械, 1983
- (4) 颜永年. 预应力钢丝缠绕筒体的设计计算. 清华大学学报, 1978年第4期
- (5) 颜永年. 预应力钢丝缠绕超高压筒体的应力及变形分析. 清华大学学报, 1978年第2期
- (6) 余国琮. 化工容器及设备. 化学工业出版社, 1980
- (7) 徐芝伦. 弹性力学·下册. 人民教育出版社, 1979

## Mechanical Analysis of Long Cylinder Wrapped With Prestressed Steel Wire in Part

Wei Xinli

(ZhengZhou Institute of Technology)

**Abstract:** In this paper, the wire-wrapped cylinder with prestress steel wire in part is divided into pre-tightening condition, internal pressure condition and working condition. By analyzing the stress and strain the solution for the three different conditions are obtained. The experimental results are presented for pre-tightening condition and a good agreement is obtained.

The calculating method given in this paper can be used as reference in engineering design of wire-wrapped crack arrestor.

**Keywords:** cylinder, wire-wrapping, crack arrestor