弹塑性各向异性损伤介质中的守恒积分方程*

牛焱洲

(能源、水利部中南勘测设计院科研所，长沙)

摘　要：本文从最小势能原理出发，导出了具有裂缝的弹塑性各向异性损伤介质的守恒积分方程。并针对二维问题定义了损伤材料的 J 积分。为实现结构分析中损伤和断裂力学的结合做了初步的探讨。

关键词：弹塑性，损伤介质，变分原理，守恒积分

用损伤力学来分析实际问题时，一般是采用数值分析方法（如有限单元法）。当结构的某一点的损伤变量值达到其临界值时，就意味着宏观裂缝开始出现，这种方法完全避开了断裂力学，是对连续介质进行分析的一种"连续力学"。但这种方法的一个最大缺点就是在比较复杂的情况下，难以建立结构的整体失稳条件，而这恰恰又是工程上十分重要的问题。这就迫使我们去寻找某种准则，来弥补损伤力学的不足。

众所周知，断裂力学在研究宏观裂缝尖端附近的应力、应变以及位移场并确定其扩展和失稳的条件等领域，已取得了很大的成功。而断裂力学仅对宏观裂缝问题适用，对微空穴、微裂缝的力学行为的研究却显得无能为力，而这正属于损伤力学研究的范畴，这就提醒我们可对含微缺陷的介质进行连续损伤力学分析，待宏观裂缝出现后，采用断裂力学进行分析，使它们各自都能充分发挥优势。

鉴于许多材料（如岩石、混凝土等）损伤的各向异性，本文引入三个损伤变量 ω_m $(m=1, 2, 3)$ 来表征。所有的推导均不涉及某种特定材料，因此具有一般性。

1　守恒积分方程的推导

如图 1，在裂缝尖端选取随动坐标系，相应于初始裂缝的坐标系为 oxyz，当裂缝有任一方向虚扩展 δa 后，相应的坐标系为 OXYZ。于是裂缝体内任意一点位移、应变和损伤变量的变分为：

* 收稿日期：1989.09.18

$$\delta u_i = u_i(X_k) - u_i^o(x_k)$$
$$= u_i(X_k) - u_i^o(X_k + \delta a_k)$$
$$= u_i(X_k) - u_i^o(X_k) - \frac{\partial u_i^o(x_k)}{\partial x_k}\delta a_k$$
$$= \delta u_i(X_k) - \frac{\partial u_i^o(x_k)}{\partial x_k}\delta a_k \qquad (1)$$

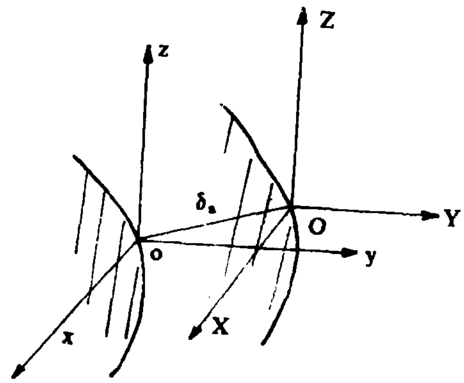

图 1

同理：

$$\delta\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e(X_k) - \varepsilon_{ij}^{oe}(x_k)$$
$$= \delta\varepsilon_{ij}^e(X_k) - \frac{\partial\varepsilon_{ij}^{oe}(x_k)}{\partial x_k}\delta a_k \qquad (2)$$

$$\delta\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p(X_k) - \varepsilon_{ij}^{op}(x_k) = \delta\varepsilon_{ij}^p(X_k) - \frac{\partial\varepsilon_{ij}^{op}(x_k)}{\partial x_k}\delta a_k \qquad (3)$$

$$\delta\omega_m = \omega_m(X_k) - \omega_m^o(x_k) = \delta\omega_m(X_k) - \frac{\partial\omega_m^o(x_k)}{\partial x_k}\delta a_k \qquad (4)$$

以上各式中，略去了 δa_k 的二阶和二阶以上的微量；$u_i^o(x_k)$、$\varepsilon_{ij}^{oe}(x_k)$、$\varepsilon_{ij}^{op}(x_k)$、$\omega_m^o(x_k)$分别表示在裂缝长度为 a 状态下，裂缝体静力平衡时的位移、弹性应变、塑性应变和损伤变量的精确解；$\delta u_i(X_k)$、$\delta\varepsilon_{ij}^e(X_k)$、$\delta\varepsilon_{ij}^p(X_k)$、$\delta\omega_m(X_k)$分别表示裂缝虚扩展后容许的位移、弹性应变、塑性应变和损伤变量在随动坐标系 OXYZ 下的变分；δa_k 表示虚扩展量在三个坐标方向的投影；i，j，k，m 分别取 1，2，3。

对弹塑性各向异性损伤介质，取自由能 ψ：

$$\rho\psi(\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p, \omega_m) = W^e(\varepsilon_{ij}^e, \omega_m) + W^p(\varepsilon_{ij}^p) + W^\omega(\omega_m) \qquad (5)$$

其中，$W^e(\varepsilon_{ij}^e, \omega_m)$为弹性应变能密度，$W^p(\varepsilon_{ij}^p)$为塑性功，$W^\omega(\omega_m)$为损伤自由能，$\rho$ 为介质密度。

取一表面光滑的或分片光滑的封闭曲面（其上各点和它内部各点都属于被研究物体所占的空间区域 Ω，且都不是裂缝体应力场或应变场的奇异点.），体积为 V，面积为 $S = S_\sigma + S_u$。

因此，系统的势能泛函为：

$$\Pi(\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p, \omega_m) = \int_V (W^e(\varepsilon_{ij}^e, \omega_m) - f_i u_i)dV + \int_V (W^p(\varepsilon_{ij}^p) + W^\omega(\omega_m))dV$$
$$- \int_{S_\sigma} \bar{P}_i u_i dS \qquad (6)$$

其中，f_i 为体积力，$\bar{P}_i$ 为面力，S_σ 为已知面力边界。

在 oxyz 坐标系，即当裂缝长度为 a 时，对应精确解的势能泛函为：

$$\Pi(\varepsilon_{ij}^{oe}, \varepsilon_{ij}^{op}, \omega_m^o) = \int_V (W^e(\varepsilon_{ij}^{oe}, \omega_m^o) - f_i u_i^o)dV + \int_V (W^p(\varepsilon_{ij}^{op}) + W^\omega(\omega_m^o))dV$$
$$- \int_{S_\sigma} \bar{P}_i u_i^o dS \qquad (7)$$

当裂缝扩展 δa_k 后，即在 OXYZ 坐标系下，设容许解所对应的势能泛函为:

$$\Pi(\varepsilon_{ij}^{e}, \varepsilon_{ij}^{p}, \omega_m)=\int_V(W^e(\varepsilon_{ij}^{e}, \omega_m)-f_i u_i)dV+\int_V(W^p(\varepsilon_{ij}^{p})+W^{\omega}(\omega_m))dV$$

$$-\int_{S_\sigma}\bar{P}_i u_i dS \tag{8}$$

将（7）、（8）两式相减，并略加整理，得:

$$\triangle\Pi=\Pi(\varepsilon_{ij}^{e}, \varepsilon_{ij}^{p}, \omega_m)-\Pi(\varepsilon_{ij}^{oe}, \varepsilon_{ij}^{op}, \omega_e^{o})=\int_V[W^e(\varepsilon_{ij}^{e}, \omega_m)-W^e(\varepsilon_{ij}^{oe}, \omega_m^{o})]dV$$

$$-\int_V f_i\delta u_i(X_k)dV+\int_V f_i\frac{\partial u_i^o(x_k)}{\partial x_k}\delta a_k dV-\int_{S_\sigma}\bar{P}_i\delta u_i(X_k)dS+\int_{S_\sigma}\bar{P}_i\frac{\partial u_i^o(x_k)}{\partial x_k}\delta a_k dS$$

$$+\int_V[\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}^{p}(x_k)+Y_m\delta\omega_m(X_k)]dV+\int_V[-\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{op}(x_k)}{\partial x_k}$$

$$-Y_m\frac{\partial\omega_m^o(x_k)}{\partial x_k}]\delta a_k dV+o(\delta u_i)^2 \tag{9}$$

在上面的推导中，我们注意到: $W^p(\varepsilon_{ij}^{p}(X_k))=W^p(\varepsilon_{ij}^{op}(x_k))+\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}^{p}$

$$W^{\omega}(\omega_m(X_k))=W^{\omega}(\omega_m^o(x_k))+Y_m\delta\omega_m$$

其中 Y_m 为与损伤变量 ω_m 相伴的热力学广义力，亦即损伤应变能释放率。

考虑到(3)、(4)式，所以有: $W^p(\varepsilon_{ij}^{p})-W^p(\varepsilon_{ij}^{op})=\sigma_{ij}\cdot(\delta\varepsilon_{ij}^{p}(x_k)-\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{op}(x_k)}{\partial x_k}\delta a_k)$

$$W^{\omega}(\omega_m)-W^{\omega}(\omega_m^o)=Y_m\cdot(\delta\omega_m(x_k)-\frac{\partial W_m^o(x_k)}{\partial x_k}\delta a_k)$$

在(9)式中，$o(\delta u_i)^2$ 为比 $(\delta u_i)^2$ 高阶小项。

注意到: $W^e(\varepsilon_{ij}^{e}, \omega_m)-W^e(\varepsilon_{ij}^{o}, \omega_m^o)$

$$=\frac{\partial W^e(\varepsilon_{ij}^{e}, \omega_m)}{\partial\varepsilon_{ij}^{e}}\delta\varepsilon_{ij}^{e}-\frac{\partial W^e(\varepsilon_{ij}^{e}, \omega_m)}{\partial\varepsilon_{ij}^{e}}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{e}}{\partial x_k}\delta a_k$$

$$+\frac{\partial W^e(\varepsilon_{ij}^{e}, \omega_m)}{\partial\omega_m}\delta\omega_m-\frac{\partial W^e(\varepsilon_{ij}^{e}, \omega_m)}{\partial\omega_m}\frac{\partial\omega_m}{\partial x_k}\delta a_k \tag{10}$$

引入小变形条件: $\delta\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})$

及: $\delta\varepsilon_{ij}=\delta\varepsilon_{ij}^{e}+\delta\varepsilon_{ij}^{p}$

且表观应力为: $\sigma_{ij}=\frac{\partial\overline{W}^e(\varepsilon_{ij}^{e}, \omega_m)}{\partial\varepsilon_{ij}^{e}}$

并根据高斯公式: $\int_S\sigma_{ij,k}dS=\oint_\Gamma\sigma_{ij}n_k d\Gamma$。

因此: $\triangle\Pi=\{-\int_V(\sigma_{ij,j}+f_i)\delta u_i(X_k)dV+\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{P}_i)\delta u_i(X_k)dS$

$$+\int_V\left(Y_m+\frac{\partial W^e(\varepsilon_{ij}^e,\ \omega_m)}{\partial\omega_m}\right)\delta\omega_m(X_k)dV-\int_V\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{oe}(x_k)}{\partial x_k}dV-\int_V f_i\frac{\partial u_i^o(x_k)}{\partial x_k}dV$$

$$+\int_V\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{op}(x_k)}{\partial x_k}dV+\int_V\left(Y_m\frac{\partial\omega_m^o(x_k)}{\partial x_k}+\frac{\partial W^e(\varepsilon_{ij}^e,\ \omega_m)}{\partial\omega_m}\frac{\partial\omega_m^o(x_k)}{\partial x_k}\right)dV$$

$$-\oint_S\bar{P}_i\frac{\partial u_i^o(x_k)}{\partial x_k}dS)\delta a_k\}+o(\delta u_i)^2 \tag{11}$$

式中$\oint_S$表示对整个封闭曲面S的面积分。

式(11)右边的大括号即为$\delta\Pi$。

根据最小势能原理，问题的精确解必须使泛函(6)取极小值，即必须有：

$$\delta\Pi=0 \tag{12}$$

所以：
$$-\int_V(\sigma_{ij,j}+f_i)\delta u_i(X_k)dV+\int_V\left(Y_m+\frac{\partial W^e}{\partial\omega_m}\right)\delta\omega_m(X_k)dV$$

$$+\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{P}_i)\delta u_i(X_k)dS-\left(\int_V\left(\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^e}{\partial x_k}+\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x_k}-f_i\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)dV\right.$$

$$\left.-\oint_S\bar{P}_i\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dS\right)\delta a_k=0 \tag{13}$$

在上式中，我们取消了上角标o，但易知问题的实质不变。注意到变分δa_k、δu_i、$\delta\omega_m$是独立的，故由式(13)可得：

平衡方程：$\sigma_{ij,j}(X_k)+f_i=0,\quad X_k\in V$ (14)

应力边界条件：$\sigma_{ij}(X_k)n_j-\bar{P}_i=0,\quad X_k\in S_\sigma$ (15)

约束条件：$Y_m+\dfrac{\partial W^e}{\partial\omega_m}=0,\quad X_k\in V$ (16)

及守恒积分方程：$\displaystyle\int_V\left(\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^e}{\partial x_k}+\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x_k}-f_i\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)dV-\oint_S\bar{P}_i\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dS=0$ (17)

由上面的推导结果可见，裂缝–弹塑性各向异性损伤介质在考虑裂缝虚扩展时的变分结果同一般常见的弹性力学的变分结果不完全一样，这实质上是由于空间坐标系的平移即利用空间标度的改变所产生的，其差异表现在两个方面：

① 导出了损伤应变能释放率Y_m的表达式，$Y_m+\dfrac{\partial W^e}{\partial\omega_m}=0$，即$Y_m=-\dfrac{\partial W^e}{\partial\omega_m}$；

② 多了一组在oxyz坐标系下，问题的精确解必须满足的守恒积分方程。

从式(17)可以看出，当k分别取1，2，3时，它实际上代表三个守恒积分方程，即它适用于一般裂缝–损伤问题，原则上由此可定义三维或二维问题的J积分。

在三维问题中鉴于裂缝前缘曲线的各个点上，裂缝的扩展能力不同。通常定义的包含有限长度前缘曲线的封闭曲线面上的守恒积分，不能反映不同前缘曲线微元上裂缝扩展能

力的差异，应在前缘曲线上逐点定义 J 积分 [7]，此处不予赘述．以下仅以平面问题为例介绍式(17)在定义平面 J 守恒积分中的应用．

2 平面问题 J 积分的定义

以下简单讨论一下守恒积分方程式(17)在平面 I 型裂缝问题中的应用．

在式(17)中，取 k = 1，得守恒积分方程在 I 型裂缝问题中的形式：

$$\int_S \left(\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^e_{ij}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^p_{ij}}{\partial x_1} - f_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)dS - \int_\Gamma \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma = 0 \tag{18}$$

据此我们定义：$$J = \int_S \left(\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^e_{ij}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^p_{ij}}{\partial x_1} - f_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)dS - \int_\Gamma \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \tag{19}$$

可以证明上面的积分与所取路径无关．注意到该积分是对以下的封闭曲线定义的，该曲线的特征是除与裂缝的交点外，其上的点都属于物体所在区域 Ω，并且包围了裂缝体的裂缝前缘．

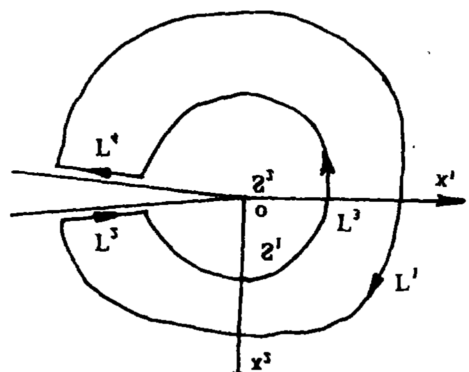

图2 Γ围道示意图

证明：令 Γ 为如图 2 所示的一闭合路径：

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$$

Γ_1 所围的面积为 S_1，Γ_3 所围的面积为 S_2，

$$S = S_1 - S_2$$

由式(18)可得：

$$\int_{S_1 - S_2} \left(\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^e_{ij}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^p_{ij}}{\partial x_1} - f_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)dS - \int_\Gamma \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma = 0$$

设裂缝面上无面力，于是：$\int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma = 0$

所以：

$$\int_{S_1 - S_2} \left(\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^e_{ij}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^p_{ij}}{\partial x_1} - f_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)dS - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_3} \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma = 0$$

由于 Γ_1 和 Γ_3 走向相反，设 Γ_3' 是和 Γ_3 走向相反的同一条路径，故可得：

$$\int_{S_1} \left(\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^e_{ij}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^p_{ij}}{\partial x_1} - f_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)dS - \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} d\Gamma$$

$$\int_{S_2} \left(\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^e_{ij}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^p_{ij}}{\partial x_1} - f_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)dS - \int_{\Gamma_3'} \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} d\Gamma$$

即：$J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma_3'}$．至此，我们证明了式(19)确是与路径无关的积分．

如果不计体积力的影响，有: $J=\int_S(\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon^e_{ij}}{\partial x_1}+\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon^p_{ij}}{\partial x_1})dS-\int_\Gamma\sigma_{ij}n_j\frac{\partial u_i}{\partial x_1}d\Gamma$ (20)

如果仅考虑弹性损伤问题，有: $J=\int_S(\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_1})dS-\int_\Gamma\sigma_{ij}n_j\frac{\partial u_i}{\partial x_1}d\Gamma$ (21)

可以看出式(21)与 Rice 的 J 积分形式相同，但应注意当考虑损伤问题时，σ_{ij} 是表观应力，已不是一般线弹性理论中的有效应力 $\bar{\sigma}_{ij}$，σ_{ij} 是损伤张量 ω_m 的函数，只有当不考虑损伤，$\omega_m=0$，从而非线性问题转化为线性问题时，两者才完全相同。因此，在考虑损伤时，式(21)与 Rice 的 J 积分有着本质的区别。

参 考 文 献

〔1〕李灏等. 材料形变失稳的各向异性损伤准则及其在成形极限中的应用. 华中工学院学报, Vol.13, 1(I), 1985

〔2〕王仁等. 塑性力学基础. 科学出版社, 1982

〔3〕钱伟长. 变分法及有限元(上册). 科学出版社, 1980

〔4〕鹫津久一郎. 弹性和塑性力学中的变分法. 科学出版社, 1984

〔5〕张培源, 罗祖道. J积分的三维理论及其在线弹性力学中的应用. 上海力学, 1984,5(1)

〔6〕Rice, J.R.. J. of Appl. Mech. Transactions, American Society of Mechanical Engineers. 1968, 35: 379–386

〔7〕宫本博. 弹塑性断裂力学. 山西人民出版社, 1983

Conservative Integral Equations In An Elasto–Plastic Anisotropic Damage Medium

Niu Yanzhou

(Mid–South Design Institute For Hydroelectric Projects, Changsha, P.R.China)

Abstract: In this paper, the conservation integral equations in an elasto–plastic anisotropic damage medium are established by the use of minimun potential energy principle, then the J–integral for damage material is also discussed. This J–integral is applicable to the combining of damage mechanics and fracture mechanics.

Keywords: Elasto–plasticity, Damage Medium, Variational Principle, Conservative Integral