

样条有限点法在弹性平面地基 分析中的应用*

王复明

(郑州工学院数力系计算力学室)

摘 要: 本文初步尝试将有限深平面地基的位移表示为三次样条函数和富氏级数的乘积形式, 利用能量原理建立控制方程。这种半解析方法将二维问题降为一维数值问题处理, 利用了样条函数良好的插值性能和富氏级数的正交性, 大幅度节省计算量和内存要求, 便于利用微机实现。实例计算表明: 本文方法具有较高的精度。

关键词: 样条函数, 半解析方法,

弹性地基上基础梁、板的计算是土木建筑和水利工程中一个重要而复杂的课题, 国内外许多学者对此进行了大量的研究, 提出了不少理论和计算方法。对于地基模型的选择, 应用最为广泛的是文克勒 (Winkler) 地基和半无限大地基。文克勒假设使弹性地基上结构物的计算大为简化, 因而在实际工程中常被采用。但是, 文克勒假设本身没有反映地基变形的连续性, 因而不能全面反映弹性地基与结构物的相互作用。弹性半空间理论假定地基是均质的、各向同性的弹性半无限体, 因而比文克勒假设更为合理。但是, 采用半无限弹性体假设, 地基必须是很厚的上层。从实测资料^[1]可以看出: 地基的沉陷主要是由于地表以下有限深度范围内的土壤变形所引起的。根据这一事实, 以及实际存在的层状地基的情况, 引起了有限深弹性层地基模型, 并受到越来越广泛的重视^[2]。本文初步尝试用样条有限点法计算有限深弹性平面地基的位移, 从而为这种更切实际情况的地基模型提供一个半解析分析方法。样条有限点法在板、壳结构分析中已得到广泛应用^{[3][4]}, 显示出计算量小、精度高、应用方便等优点。由于在位移函数中引入了正交函数族, 降低了数值计算维数, 克服了有限元法由纯数值计算带来工作量大的缺点。本文将样条有限点法进一步应用于介质分析中去, 位移函数表示为三次样条函数与富氏级数的乘积形式, 利用最小势能原理建立控制方程。由于富氏级数具有正交性, 级数各项之间不存在偶联问题, 使问题的求解得到大大简化。根据本文方法, 弹性平面地基的计算归结为求解十几阶的线性方程组, 很容易利用微机实现, 而且计算结果具有较高的精度。

* 收稿日期: 1989.03.01

1 均布力作用下弹性层表面的位移

对于弹性地基上结构物的计算,关键在于建立地基的刚度矩阵,通常先建立地基的柔度矩阵,即求解单位力作用下地基的表面位移。考虑层厚为 H 的地基位于不变形的刚性下卧层上,在长度为 C 的范围内作用均布荷载,其合力为单位力,作用方向为水平或垂直。将地基范围取得足够大,使得边界约束条件对荷载作用区域附近范围内计算结果的影响可以略

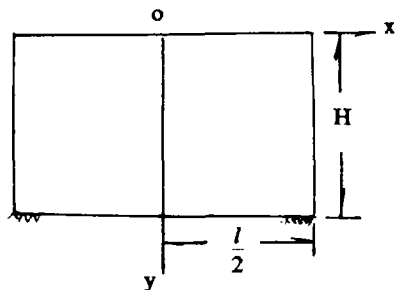


图 1

去。地基的水平位移 $u(x, y)$, 竖向位移 $v(x, y)$ 表示成下列函数:

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^M [\Phi] X_m \{a\}_m \quad (1)$$

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^M [\Phi] Y_m \{b\}_m \quad (2)$$

式中 $X_m = X_m(x)$ 、 $Y_m = Y_m(x)$ 取为富氏级数,

$$\text{对于水平荷载, } X_m = \sin \frac{m\pi(x + \frac{L}{2})}{L}, \quad Y_m = \cos \frac{m\pi(x + \frac{L}{2})}{L}$$

$$\text{对于垂直荷载, } X_m = \cos \frac{m\pi(x + \frac{L}{2})}{L}, \quad Y_m = \sin \frac{m\pi(x + \frac{L}{2})}{L}$$

$$[\Phi] = [\Phi_{-1} \quad \Phi_0 \quad \Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_{N-1}]$$

$$\{a\}_m = [a_{-1} \quad a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{N-1}]_m^T$$

$$\{b\}_m = [b_{-1} \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{N-1}]_m^T$$

$\Phi_i = \Phi_i(y)$ 是由三次 B 样条构成的基函数, 对应于区间 $[0, H]$ 上的 N 等分。 a_i 、 b_i 为样条节点参数。 $\Phi_i(y)$ 的具体表达式为:

$$\Phi_{-1} = \varphi_3(\frac{y}{h} + 1), \quad \Phi_0 = \varphi_3(\frac{y}{h}),$$

$$\Phi_1 = \varphi_3(\frac{y}{h} - 1), \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\Phi_i = \varphi_3(\frac{y}{h} - i), \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\Phi_{N-2} = \varphi_3(\frac{y}{h} - N + 2),$$

$$\Phi_{N-1} = \varphi_3(\frac{y}{h} - N + 1) - \frac{1}{2} \varphi_3(\frac{y}{h} - N) + \varphi_3(\frac{y}{h} - N - 1).$$

式中 φ_3 表示三次B样条, $h = \frac{H}{N}$ 。上述基函数满足下列边界条件:

$$y = H, \quad \Phi_i = 0, \quad (i = -1, 0, 1, \dots, N-1)$$

位移函数(1), (2)可用矩阵形式表示为:

$$\{\delta\} = [u \quad v]^T = \sum_{m=1}^M [N]_m \{r\}_m = [N]\{r\} \quad (3)$$

式中 $[N] = [[N]_1 \quad [N]_2 \quad \dots \quad [N]_M]$, $\{r\} = [\{r\}_1^T \quad \{r\}_2^T \quad \dots \quad \{r\}_M^T]^T$

$$[N]_m = \begin{bmatrix} [\Phi]X_m & 0 \\ 0 & [\Phi]Y_m \end{bmatrix} \quad \{r\}_m = [\{a\}_m^T \quad \{b\}_m^T]^T$$

根据平面问题的几何方程, 应变分量可表示为:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^M [B]_m \{r\}_m = [B]\{r\} \quad (4)$$

式中 $[B] = [[B]_1 \quad [B]_2 \quad \dots \quad [B]_M]$

$$[B]_m = \begin{bmatrix} [\Phi]X'_m & 0 \\ 0 & [\Phi]Y'_m \\ [\Phi]X'_m & [\Phi]Y'_m \end{bmatrix}$$

应用平面应变问题的物理方程, 应力分量可表示为:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{r\} \quad (5)$$

式中 $[D]$ 为弹性矩阵。对于各向同性介质,

$$[D] = \frac{2(1-\mu)G}{1-2\mu} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

G 、 μ 分别表示地基的剪切模量和泊松比。

利用最小势能原理, 可得线性方程组,

$$[K]\{r\} = \{F\} \quad (6)$$

式中广义刚度矩阵 $[K]$ 由下式确定:

$$[K] = \int_0^H \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [B]^T [D] [B] dx dy$$

$$= \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & \cdots & [K]_{1M} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & \cdots & [K]_{2M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [K]_{M1} & [K]_{M2} & \cdots & [K]_{MM} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{其中: } [K]_{mn} = \int_0^H \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [B]_m^T [D] [B]_n dx dy \quad (8)$$

由于基函数 X_m 、 Y_m 在 $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ 上构成正交基, 即:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} X_m X_n dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} Y_m Y_n dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} X'_m X'_n dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} Y'_m Y'_n dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} X_m Y'_n dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} X'_m Y_n dx = 0 \quad (m \neq n)$$

可知当 $m \neq n$ 时, 有 $[K]_{mn} = 0$, 即 $[K]$ 为分块对角形矩阵,

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_1 & & & \\ & [K]_2 & & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & & & [K]_M \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{其中: } [K]_m = \int_0^H \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [B]_m^T [D] [B]_m dx dy = \begin{bmatrix} [K]_{uu} & [K]_{uv} \\ [K]_{vu} & [K]_{vv} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[K]_{uu} = \frac{2(1-\mu)G}{1-2\mu} [C_x [F_y] + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} F_x [C_y]]$$

$$[K]_{uv} = \frac{2(1-\mu)G}{1-2\mu} [\frac{\mu}{1-\mu} H_{yx} [H_y] + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} H_{xy} [H_y]^T]$$

$$[K]_{vu} = [K]_{uv}^T$$

$$[K]_{vv} = \frac{2(1-\mu)G}{1-2\mu} [F_y [C_y] + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} C_y [F_y]]$$

$[C_y]$ 、 $[F_y]$ 及 $[H_y]$ 为下列矩阵,

$$[C_y] = \int_0^H [\Phi]^T [\Phi] dy \quad [F_y] = \int_0^H [\Phi]^T [\Phi] dy \quad [H_y] = \int_0^H [\Phi]^T [\Phi] dy$$

各矩阵的具体形式见文献[3].

C_x 、 C_y 、 F_x 、 F_y 、 H_{xy} 及 H_{yx} 为下列常数:

$$C_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} X_m' X_m' dx \quad C_y = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} Y_m' Y_m' dx$$

$$F_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} X_m X_m dx \quad F_y = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} Y_m Y_m dx$$

$$H_{xy} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} X_m Y_m' dx \quad H_{yx} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} X_m' Y_m dx$$

广义荷载向量 $\{\Gamma\}$ 由下式确定:

$$\{\Gamma\} = \int_s [N]^T \{q\} ds = [\{\Gamma\}_1^T \quad \{\Gamma\}_2^T \quad \dots \quad \{\Gamma\}_M^T]^T \quad (11)$$

$$\{\Gamma\}_m = \int_s [N]_m^T \{q\} ds = [\{\Gamma\}_u^T \quad \{\Gamma\}_v^T]^T \quad (12)$$

式中: $\{q\} = [q_x \quad q_y]^T$ 为荷载向量。对于水平单位力, $q_x = \frac{1}{C}$, $q_y = 0$, 则:

$$\begin{aligned} \{\Gamma\}_u &= \int_s [\Phi]^T X_m q_x dS = [\Phi(0)]^T \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} \frac{1}{C} \sin m\pi(x + \frac{L}{2}) / L \quad dx \\ \{\Gamma\}_v &= 0 \end{aligned}$$

对于竖向单位力, $q_x = 0$, $q_y = \frac{1}{C}$, 则:

$$\begin{aligned} \{\Gamma\}_u &= 0 \\ \{\Gamma\}_v &= \int_s [\Phi]^T Y_m q_y dS = [\Phi(0)]^T \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} \frac{1}{C} \sin m\pi(x + \frac{L}{2}) / L \quad dx \end{aligned}$$

$$\text{其中: } [\Phi(0)] = [\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6} \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

由所设定的位移函数(3)可知, 求解位移场 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的问题转化为在新的求解空间里确定广义坐标 $\{r\}$ 。由于级数各项之间不存在偶联问题, 可以对每一项分别进行计算, 即求解下列方程组:

$$[K]_m \{r\}_m = \{\Gamma\}_m \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (13)$$

上述方程为 $2 \times (N+1)$ 阶。由于样条函数具有良好的插值性能, 一般不需要太多的离散即可获得较高的计算精度, 因此, 方程组(13)通常只有十几阶, 很容易在微机上实现。

2 数值计算结果及分析

2.1 方法的收敛性

计算表明: 计算结果关于级数所取项数的收敛速度与相对尺寸 L/C 关系密切, L/C 值越大, 收敛越慢, 但 L/C 值较大能够减小边界约束条件对荷载作用区域附近计算结果的影响, 从而使结果更接近真实解答。一般当 $L/C > 20$ 时, 这种影响可以略去。

表1列出了均质有陷深弹性层状地基的沉陷系数 λ (沉陷 $V(x, 0) = \lambda / Gqc$)。地

基的层厚比 $H/C = 10$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 计算中取 $L/C = 20$, $N = 6, 12, 16, 20, 30, 40$ 。结果表明, 当 $M \geq 12$ 时, 继续增加级数对计算结果已无明显影响。

表 2 列出了 $N = 6, 10$ 时的计算结果, 从中可以看出, 对此例取 $N = 6$ 已足够了。此时方程组 (13) 为 14 阶, 计算十分简便。

表 1 计算结果关于级数所取项数 M 的收敛性

| M | X / C | | | | | |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8 | 0.6981 | 0.4646 | 0.2203 | 0.1854 | 0.1063 | 0.0758 |
| 12 | 0.7505 | 0.4155 | 0.2603 | 0.1684 | 0.1187 | 0.0766 |
| 16 | 0.7708 | 0.4077 | 0.2499 | 0.1695 | 0.1157 | 0.0770 |
| 20 | 0.7755 | 0.4106 | 0.2493 | 0.1667 | 0.1138 | 0.0771 |
| 30 | 0.7659 | 0.4124 | 0.2505 | 0.1670 | 0.1139 | 0.0773 |
| 40 | 0.7660 | 0.4147 | 0.2505 | 0.1672 | 0.1140 | 0.0773 |

表 2 计算结果关于等分数 N 的收敛性

| N | X / C | | | | | |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 0.7755 | 0.4106 | 0.2493 | 0.1667 | 0.1137 | 0.0771 |
| 10 | 0.7878 | 0.4077 | 0.2519 | 0.1691 | 0.1155 | 0.0787 |

2.2 计算精度

文献[2]利用弹性力学平面问题中的 Fourier 变换解法求解粘合于刚性下卧层上的有限深弹性层表面受竖向力作用下的位移, 并给出沉陷系数的数值结果。为了验证本文方法的合理性, 计算了其中部分算例, 见表 3。从中可以看出, 本文方法具有较高的计算精度。

表 3 有限深弹性层地基沉陷系数 $\epsilon_{\text{m}}^{\text{yy}}$ ($H/C = 10$)

| μ | 0.3 | | 0.2 | | 0 | | |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| X / C | 本 文 | 文献[13] | 本 文 | 文献[13] | 本 文 | 文献[13] | 文献[8] |
| 0 | 0.77548 | 0.77386 | 0.90530 | 0.90532 | 1.15515 | 1.15384 | 1.16008 |
| 0.5 | 0.61514 | | 0.72207 | | 0.92767 | | |
| 1.0 | 0.41059 | 0.40715 | 0.49704 | 0.48732 | 0.63242 | 0.63075 | 0.63718 |
| 1.5 | 0.31676 | | 0.37924 | | 0.49624 | | |
| 2.0 | 0.24928 | 0.25005 | 0.30239 | 0.30686 | 0.40076 | 0.40449 | 0.41043 |
| 2.5 | 0.20407 | | 0.25027 | | 0.33497 | | |
| 3.0 | 0.16667 | 0.16600 | 0.20693 | 0.20998 | 0.28006 | 0.28231 | 0.28749 |
| 3.5 | 0.13824 | | 0.17362 | | 0.23729 | | |
| 4.0 | 0.11365 | 0.11170 | 0.14467 | 0.14682 | 0.20003 | 0.20194 | 0.20614 |
| 4.5 | 0.09415 | | 0.12143 | | 0.16970 | | |
| 5.0 | 0.07714 | 0.07428 | 0.10098 | 0.10276 | 0.14286 | 0.14518 | 0.14826 |

3 结 语

本文以三次样条函数和富氏级数作为位移逼近函数,建立了有限深弹性层地基分析的半解析格式,将二维问题降为一维数值问题处理,利用富氏级的正交性,使问题归结为求解若干次低阶方程组,很容易在微机上实现。数值算例结果表明,本文方法具有较高的计算精度,从而为弹性地基上结构物的计算提供了一个简便有效的分析工具。

关于多层地基及空间地基分析的样条半解法,参见文献[5]。

参 考 文 献

- (1) 北京市地质地形勘测处. 关于北京市区高层建筑天然地基的基本资料和初步分析
- (2) 有限深弹性层上基础梁的计算. 华东水利学院学报, 1984年第2期
- (3) 秦荣. 结构力学的样条函数方法. 广西人民出版社, 1985
- (4) 周鸿钧, 王复明, 林皋. 薄拱坝自振特性的简便算法. 水利学报, 1987年第8期
- (5) 王复明. 层状地基分析的样条半解析法及其应用. 河南科技出版社, 1988

Spline Finite Point Method in the Analysis of Elastic Plane Foundation

Wang Fuming

(ZhengZhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper, a spline semi-analytic method is developed which is applicable to the static analysis of elastic plane foundation. The displacement functions are expressed as a product of cubic splines and Fourier's series, and the governing equation can be obtained while the principle of minimum potential energy is applied.

Due to the orthogonality of Fourier's series and the ideal interpolation property of spline function, the two dimensional problem is simplified to a one dimensional discretization, therefore the computational effort and storage requirement can be greatly saved. Excellent accuracy has been shown in numerical examples.

Keywords: Spline function, Semi-analytic Method