第11卷 第1期　　郑州工学院学报　　Vol.11 No.1
1990年 3 月　　Journal of ZhengZhou Institute of Technology　　Mar. 1990

矩阵范数的应用
——矩阵方程解的误差估计*

侯双印　　侯双根

（郑州工学院）　　（陕西工学院）

摘　要：设有矩阵方阵 $AX=B$，其中 A、B 是 $n\times n$ 的复矩阵，当 A、B 都有摄动矩阵或 A、B 中的一个有摄动矩阵时，本文应用矩阵范数对矩阵方程 $AX=B$ 的解的误差都作出估计。

关键词：矩阵方程，矩阵范数，摄动矩阵

1 预备知识

定义1：设矩阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$a_{ij}$ 的误差为 $\delta_{ij}\in C$ （i，j＝1，…，n）即准确矩阵为：

$$(a_{ij})+(\delta_{ij})=(a_{ij}+\delta_{ij})$$

称：$\delta=(\delta_{ij})$ 为A的摄动矩阵。

定义2：在 $C^{n\times n}$ 中规定矩阵A的一个实函数，记作 $\|A\|$，此函数若满足：

(1) 正定条件：当 $A\neq(0)$ 时，$\|A\|>0$；

(2) 齐次条件：对任何 $a\in C$，有 $\|aA\|=|a|\|A\|$；

(3) 三角不等式：对任何A，$B\in C^{n\times n}$ 都有：$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$

(4) 对任何A，$B\in C^{n\times n}$ 都有：$\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$

则称这个实函数 $\|A\|$ 是方阵A的范数。

引理：设方阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 可逆，$\|A\|$ 为A的范数，δ 为A的摄动矩阵，如 $\|A^{-1}\delta\|<1$，

则有：(1) $E+A^{-1}\delta$ 可逆，且 $\|(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|\leqslant\dfrac{\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}$；

(2) $A+\delta$ 可逆，且 $(A+\delta)^{-1}=(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}$；

(3) $\|A^{-1}-(A+\delta)^{-1}\|\leqslant\dfrac{\|A^{-1}\|\|A^{-1}\delta\|\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}$

证明：(1)的证明。先证：$E+A^{-1}\delta$ 可逆。

---

* 收稿日期：1988.11.11

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

设任意$X\in C^{n\times n}$且$X\neq(0)_{n\times n}$则有：

$$\|(E+A^{-1}\delta)X\|=\|X+A^{-1}\delta X\|\geqslant\|X\|-\|A^{-1}\delta X\|$$
$$\geqslant\|X\|-\|A^{-1}\delta\|\|X\|=\|X\|(1-\|A^{-1}\delta\|)>0$$

从而知$(E+A^{-1}\delta)X=(0)_{n\times n}$只有解$X=(0)_{n\times n}$，故$E+A^{-1}\delta$可逆。

次证：$\|(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|\leqslant\dfrac{\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}$

$\because(E+A^{-1}\delta)(E+A^{-1}\delta)^{-1}=E$

$\therefore(E+A^{-1}\delta)^{-1}=E-A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}$

故$\|(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|\leqslant\|E\|+\|A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|\leqslant\|E\|+\|A^{-1}\delta\|\cdot\|(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|$

从而有：$\|(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|\leqslant\dfrac{\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}$

(2)的证明。

$\because A+\delta=A(E+A^{-1}\delta)$，而A，$E+A^{-1}\delta$都可逆，

$\therefore A+\delta$可逆，且$(A+\delta)^{-1}=(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}$。

(3)的证明。

$\because A^{-1}-(A+\delta)^{-1}=A^{-1}-(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}=[E-(E+A^{-1}\delta)^{-1}]A^{-1}$

而 $(E+A^{-1}\delta)^{-1}=E-A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}$

$\therefore A^{-1}-(A+\delta)^{-1}=A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}$

又 $\|(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|\leqslant\dfrac{\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}$

$$\therefore\|A^{-1}-(A+\delta)^{-1}\|\leqslant\|A^{-1}\delta\|\|(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|\|A^{-1}\|\leqslant\frac{\|A^{-1}\delta\|\|A^{-1}\|\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}$$

2 矩阵方程解的误差估计

定理：设1) 矩阵$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$的摄动矩阵为$\delta=(\delta_{ij})\in C^{n\times n}$，矩阵$B=(b_{ij})\in C^{n\times n}$的摄动矩阵为$\delta^{*}=(\delta_{ij}^{*})\in C^{n\times n}$；2) A可逆，$B\neq(0)_{n\times n}$；3) $\|A^{-1}\delta\|<1$，

如果X、X^{*}分别满足：$AX=B$， $(A+\delta)X^{*}=B+\delta^{*}=B^{*}$

则有：1° $$\frac{\|X-X^{*}\|}{\|X\|}\leqslant\|A\|\|A^{-1}\|(\frac{\|B-B^{*}\|}{\|B\|}+\frac{\|E\|\|A^{-1}\delta\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}\frac{\|B^{*}\|}{\|B\|})$$

2° $$\frac{\|X-X^{*}\|}{\|X\|}\leqslant\frac{\|A\|\|A^{-1}\|\|B-B^{*}\|}{\|B\|}+\frac{\|A^{-1}\delta\|\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}(1+\frac{\|A^{-1}\delta^{*}\|\|A\|}{\|B\|})$$

证明：1°的证明。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

∵方阵A，$A+\delta$都可逆，

$$\therefore X-X^{*}=A^{-1}B-(A+\delta)^{-1}B^{*}=A^{-1}B-A^{-1}B^{*}+A^{-1}B^{*}-(A+\delta)^{-1}B^{*}$$

$$=A^{-1}(B-B^{*})+[A^{-1}-(A+\delta)^{-1}]B^{*}$$

故 $\|X-X^{*}\|\leqslant\|A^{-1}(B-B^{*})\|+\|[A^{-1}-(A+\delta)^{-1}]B^{*}\|$

$$\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|B-B^{*}\|+\|A^{-1}-(A+\delta)^{-1}\|\|B^{*}\|$$

而：$\dfrac{1}{\|X\|}\leqslant\|A\|/\|B\|\qquad\|A^{-1}-(A+\delta)^{-1}\|\leqslant\dfrac{\|A^{-1}\|\|A^{-1}\delta\|\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}$

$$\therefore\frac{\|X-X^{*}\|}{\|X\|}\leqslant\|A\|\|A^{-1}\|\left(\frac{\|B-B^{*}\|}{\|B\|}+\frac{\|E\|\|A^{-1}\delta\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}\frac{\|B^{*}\|}{\|B\|}\right)$$

2°的证明。

$$\because X-X^{*}=A^{-1}(B-B^{*})+[A^{-1}-(A+\delta)^{-1}]B^{*}$$

而：$A^{-1}-(A+\delta)^{-1}=A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}$

$$B^{*}=B+\delta^{*}$$

$$\therefore X-X^{*}=A^{-1}(B-B^{*})+A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}B+A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}\delta^{*}$$

$$\|X-X^{*}\|\leqslant\|A^{-1}(B-B^{*})\|+\|A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}B\|+\|A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}\delta^{*}\|$$

$$\leqslant\|A^{-1}\|\|B-B^{*}\|+\|A^{-1}\delta\|\|(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|\|A^{-1}B\|+\|A^{-1}\delta\|\|(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|\|A^{-1}\delta^{*}\|$$

又：$A^{-1}B=X,\qquad\|A^{-1}B\|=\|X\|$

$$\frac{1}{\|X\|}\leqslant\|A\|/\|B\|\qquad\|(E+A^{-1}\delta)^{-1}\|\leqslant\frac{\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}$$

$$\therefore\frac{\|X-X^{*}\|}{\|X\|}\leqslant\frac{\|A\|\|A^{-1}\|\|B-B^{*}\|}{\|B\|}+\frac{\|A^{-1}\delta\|\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}\left(1+\frac{\|A^{-1}\delta^{*}\|\|A\|}{\|B\|}\right)$$

推论1：当$\delta=(0)_{n\times n}$，由1°得：$\dfrac{\|X-X^{*}\|}{\|X\|}\leqslant\|A\|\|A^{-1}\|\dfrac{\|B-B^{*}\|}{\|B\|}$

推论2：当$B=B^{*}$即$\delta^{*}=(0)_{n\times n}$时，有：$\dfrac{\|X-X^{*}\|}{\|X\|}\leqslant\|A\|\|A^{-1}\|\dfrac{\|E\|\|A^{-1}\delta\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}$

及：$\dfrac{\|X-X^{*}\|}{\|X\|}\leqslant\dfrac{\|A^{-1}\delta\|\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}$

从而有：$\dfrac{\|X-X^{*}\|}{\|X\|}\leqslant\min\left(\dfrac{\|A^{-1}\delta\|\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|},\ \|A\|\|A^{-1}\|\dfrac{\|A^{-1}\delta\|\|E\|}{1-\|A^{-1}\delta\|}\right)$

推论3：当$B=B^{*}$时，且$\|A^{-1}\|\|\delta\|<1$有：

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{\|X - X^*\|}{\|X\|} \leqslant \min\left(K(A)\frac{\|E\|\frac{\|\delta\|}{\|A\|}}{1 - K(A)\frac{\|\delta\|}{\|A\|}},\ K^2(A)\frac{\|E\|\frac{\|\delta\|}{\|A\|}}{1 - K(A)\frac{\|\delta\|}{\|A\|}}\right)$$

其中：$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$。

参 考 文 献

〔1〕 丁学仁，蔡高厅编．《工程中的矩阵理论》．天津大学出版社，1985年9月第一版

〔2〕 Л.А刘斯铁尔尼克，В.И索伯列夫著．《泛函分析概要》．科学出版社，1964年

〔3〕 候双印．向量范数、矩阵范数的应用-线性方程组解的误差估计的推广

Application of matrix norm on the error estimate of solution of matrix equation

Hou Shuangyin (ZhengZhou Institute of Technology)

Hou Shuanggen (ShanXi Institute of Technology)

Abstract: In this paper, an estimation of error of solution of matrix equation is made, i.e., the following result is obtained.

Theorem Let 1) $\delta = (\delta_{ij}) \in C^{n\times n}$, $\delta^* = (\delta^*_{ij}) \in C^{n\times n}$ be disturbance matrices of matrix $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, $B = (b_{ij}) \in C^{n\times n}$, respectively; 2) A be an invertible matrix, $B \neq (0)_{n\times n}$; 3) $\|A^{-1}\delta\| < 1$, If there exist X、X^* such that $AX = B$, $(A + \delta)X^* = B + \delta^* = B^*$

then: 1° $\frac{\|X - X^*\|}{\|X\|} \leqslant \|A\|\|A^{-1}\|\left(\frac{\|B - B^*\|}{\|B\|} + \frac{\|E\|\|A^{-1}\delta\|}{1 - \|A^{-1}\delta\|}\frac{\|B^*\|}{\|B\|}\right)$

2° $\frac{\|X - X^*\|}{\|X\|} \leqslant \frac{\|A\|\|A^{-1}\|\|B - B^*\|}{\|B\|} + \frac{\|A^{-1}\delta\|\|E\|}{1 - \|A^{-1}\delta\|}\left(1 + \frac{\|A^{-1}\delta^*\|\|A\|}{\|B\|}\right)$

Keywords: matrix equation, matrix norm, disturbance matrix

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net