

# 空间弯曲和扭转形杆动态特性的 有限元分析\*

易恒杰

(郑州工学院机械系)

特布雷克

(加拿大多伦多大学机械工程系)

**摘 要:** 以三个移动和三个转动自由度的空间直角坐标推导了空间弯曲和扭转形杆的一系列基本方程式, 通过解决应变为常量和零时的位移与应变关系, 建立了形杆的刚体和常应变模式, 以位移为基本函数, 形成了单元的有限元模型。分析了三个自由振动的例子, 计算结果与实测值十分一致, 证明了公式和单元矩阵的正确性。

**关键词:** 平衡方程式, 运动学, 单元矩阵, 有限元法

空间弯曲和扭转形杆, 在机械、建筑等工程中应用很广。这种形杆可用一些直线形梁单元的组合进行有限元分析。但是, 这种方法引起形杆的几何形状误差, 尤其表现在节点处法线与中心线不确定, 因而, 在节点上出现某些应力值‘突变’现象。若采用平均值法求节点的真实应力值, 又会引起另一种误差来源。一方面增加单元的数目, 可以减少形杆的几何形状误差和其它误差。另一方面, 建立一种中心线弯曲和扭转为常量的单元使几何形状误差减少到最小值, 从而有效地降低了整体误差。

有限元法的早期, 建立了一些平面弯曲单元[1]。其公式是以柔度法为基础建立的, 刚度矩阵靠求逆法得到。由于没有采用位移形状函数, 通常不可能求得一致载荷向量和质量矩阵。在近期, 建立了预扭转, 弯曲和螺旋形杆的有限元模式[2-3]。本文推导了空间弯曲和扭转形杆的基本方程式, 建立了单元刚度和质量矩阵以及载荷列阵, 最后举例说明。

## 1 平衡方程式

考虑一个空间弯曲和扭转形杆见图 1。形杆的内力和内力矩分别用  $Q$  和  $M$  表示, 单位长度的外力和外力矩分别用  $\bar{F}$  和  $\bar{Q}$  表示。应用弹性力学的常规符号, 可以写出具有一定长度形杆的平衡方程式如下: 见图 2。

---

\* 收稿日期: 1989.04.01

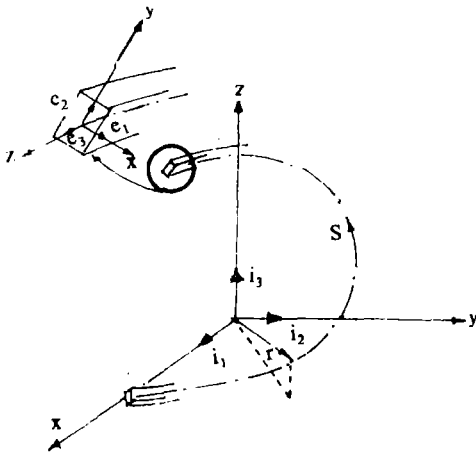


图1 总体和局部坐标系

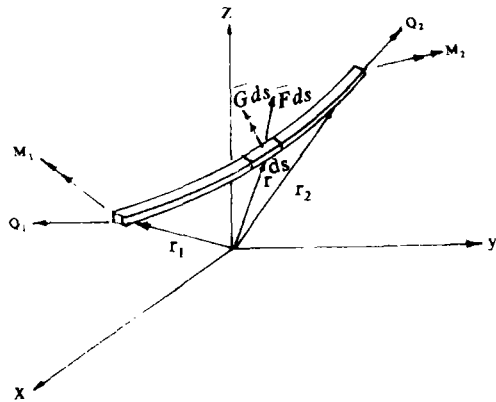


图2 内力和外力

对于移动平衡,

$$Q_2 - Q_1 + \int_{s_1}^{s_2} \bar{F}(S) dS = \frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} m \dot{u} dS \quad (1)$$

式中,  $m$ —单位长度的质量,  $u$ —位移向量。

对于旋转平衡,

$$\begin{aligned} M_2 - M_1 + (r_2 \times Q_2) - (r_1 \times Q_1) + \int_{s_1}^{s_2} (r \times \bar{F} + \bar{G}) dS \\ = \frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} m r \times \dot{u} dS + \frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} j \dot{\theta} dS \end{aligned} \quad (2)$$

式中:  $j$ —单位长度的惯性矩,  $\theta$ —转角向量。

式(2)可以表示为如下形式:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{d}{dS} [M + (r \times Q)] + (r \times \bar{F} + \bar{G}) \right\} dS = \frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} (j \dot{\theta} + m r \times \dot{u}) dS \quad (3)$$

考虑到杆形的长度是任意的, 要满足式(3)则需要:

$$\frac{d}{dS} M + \frac{dr}{dS} \times Q + r \times \frac{dQ}{dS} + r \times \bar{F} + \bar{G} = \frac{d}{dt} (j \dot{\theta} + m r \times \dot{u}) \quad (4)$$

式中  $dr/dS$  为单位长度的切向向量, 并用  $t$  表示, 式(4)可以表示为:

$$\frac{d}{dS} M + t \times Q + r \times \frac{dQ}{dS} + r \times \bar{F} + \bar{G} = j \ddot{\theta} + m(\dot{r} \times \dot{u} + r \times \ddot{u}) \quad (5)$$

同理, 可以把式(1)表示如下:

$$\frac{dQ}{dS} + \bar{F} = m \ddot{u} \quad (6)$$

由式(6)可知  $r \times (dQ/dS) + r \times \bar{F} = m r \times \ddot{u}$ , 将此式代入式(5), 并注意  $\dot{r} \equiv \ddot{u}$ , 则式(5)可以简化为:

$$(d/dS)M + t \times Q + \bar{G} = j \ddot{\theta} \quad (7)$$

由式(6)和(7)组成空间杆件的平衡方程式。其中, 向量的大小可以用总体坐标系  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  或局部坐标系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的分量来表示, 例如力矩向量可以表示为:

$$M = \bar{I}_1 M_x + \bar{I}_2 M_y + \bar{I}_3 M_z \quad \text{或} \quad M = c_1 M_x + c_2 M_y + c_3 M_z \quad (8, 9)$$

在有限元公式中, 表示内力的大小最好是根据它们的局部或单元坐标系的分量来表示。

利用局部坐标系的分量, 计算线段  $S$  的导数, 例如对弯曲力矩向量。

$$\frac{dM}{dS} = \frac{dM_x}{dS} c_1 + \frac{dM_y}{dS} c_2 + \frac{dM_z}{dS} c_3 + M_x \frac{dc_1}{dS} + M_y \frac{dc_2}{dS} + M_z \frac{dc_3}{dS} \quad (10)$$

式中:  $c_i$  具有单位长度,  $dc_i$  表示单位向量的方向增量变化,  $dc_i/dS$  表示曲线  $S$  的弯曲和扭转量, 并用  $K$  表示:

$$M_x dc_1/dS + M_y dc_2/dS + M_z dc_3/dS = K \times M \quad (11)$$

式(10)可以写成:

$$dM/dS = M' + K \times M$$

利用局部坐标系的分量表示平衡方程式向量的大小, 并注意到  $t=c_3$ , 平衡方程式可以写成:

$$Q' + K \times Q + \bar{F} = m\ddot{u}, \quad M' + K \times M + c_3 \times Q + \bar{G} = j\ddot{\theta} \quad (12, 13)$$

其中:

$$M' = \frac{dM_x}{dS} c_1 + \frac{dM_y}{dS} c_2 + \frac{dM_z}{dS} c_3, \quad Q' = \frac{dQ_x}{dS} c_1 + \frac{dQ_y}{dS} c_2 + \frac{dQ_z}{dS} c_3$$

## 2 空间杆件的运动学

设一有限长度的杆件受到拉伸, 剪切和弯曲变形见图 3。在杆件整个长度上, 转角向量的变化为:

$$\theta_2 - \theta_1 = \int_{s_1}^{s_2} k(S) dS \quad (14)$$

式中:  $k(S)$  表示曲线  $S$  的弯曲—扭转率。

根据前述的方法, 式(14)可写为:

$$\int_{s_1}^{s_2} (d\theta/dS - k) dS = 0 \quad (15)$$

$$\text{得: } d\theta/dS = k \quad (16)$$

对于拉伸和剪切变形, 位移向量  $u$  的变化为:

$$u_2 - u_1 = \int_{s_1}^{s_2} (\theta \times t) dS = \int_{s_1}^{s_2} \varepsilon dS \quad (17)$$

式中:  $\theta \times t$  项是由刚体转动引起的位

移向量。如这部分位移向量从整个位移向量变化中除去时, 由于弹性拉伸和剪切引起的位移变化就能够得到。同理将式(17)写成:

$$\int_{s_1}^{s_2} \{du/dS + t \times \theta - \varepsilon\} dS = 0$$

$$\text{得: } \varepsilon = du/dS + t \times \theta$$

(18)

式(16)和式(18)是描述空间杆件的线性应变(或弯曲—扭转率)与位移(或转角)关系的。值得注意的是在这些方程式中  $\theta$  和  $u$  是独立的向量。没有应用克西荷夫关于转角是

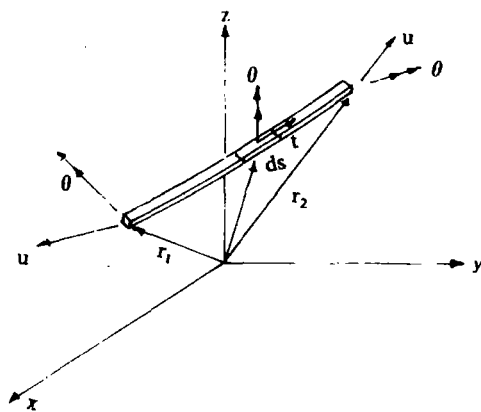


图3 位移和转角

位移导数的假设。因此,式(16)和式(18)可以看作是铁摩辛柯梁到任意空间梁的广义运动学方程式。

再次利用局部座标的分量表示,  $u$  和  $\theta$  向量, 式(16)和(18)可以表示为:

$$\varepsilon = u' + K \times u + c_j \times \theta, \quad k = \theta' + K \times \theta \quad (19, 20)$$

### 3 基本关系

在有限元法中,用矩阵形式表示基本关系比用矢量形式表示更好。对于线性弹性状态,内力与应变、内力矩与弯曲-扭转率的关系可以表示为:

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GA_x & & \\ & GA_y & \\ & & EA_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{和} \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_x & & \\ & EI_y & \\ & & GA_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \quad (22)$$

式中:  $A_x$  和  $A_y$ —剪切面积;  $A_z$ —横截面积。

$I_z$ —极惯矩;  $I_x$  和  $I_y$ —局部座标  $x$  和  $y$  轴的惯性矩;  $E$  和  $G$ —扬氏弹性模量和剪切模量。

### 4 基本函数

对于一般三维梁单元,考虑每一单元有 12 个自由度,每一节点有三个移动和三个转动自由度。还必须选择适当的形状函数。在有限元法文献中,总是把多项式作为基本函数。基本函数应能模拟常应变状态,即  $\varepsilon = \text{常数}$  和刚体位移状态即  $\varepsilon = 0$ 。但是,任意弯曲和扭转杆件的刚体模式与直形杆件的刚体模式不同,不能够用少数几项多项式来完全地模拟。我们用线性多项式建立每节点三个转动和三个移动自由度的单元刚度矩阵和载荷列阵。当弯曲和扭转等于零时,所建立的矩阵能够推出直线铁摩辛柯梁的刚度矩阵和载荷列阵。利用这种单元很多例子证明性能很好,但是,在纯预扭转单元的情况下,计算结果不收敛。一系列实验得出这种反常特性的原因,在于线性形状函数中缺少刚体模式。因此,决定把刚体模式引入所用的形状函数中。

在方程式(19)和(20)中,设应变  $\varepsilon$  和弯曲-扭转  $k$  等于零,能够得到任意弯曲和扭转杆件的刚体模式。从而得到下面的矩阵微分方程式:

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & K_z & -K_y \\ -K_z & 0 & K_x \\ K_y & -K_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \{\theta\}' = [G]\{\theta\} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_z & -K_y \\ -K_z & 0 & K_x \\ K_y & -K_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

$$\text{或 } \{u\}' = [G]\{u\} + [J]\{\theta\} \quad (24)$$

在求解这些方程式以前, 还应当考虑应变  $\varepsilon$  和弯曲-扭转率  $k$  为常量的模式。在这种情况下, 所得的方程式可以用符号表示为:

$$\{\theta\}' - [G]\{\theta\} = \{d\} \quad \text{和} \quad \{u\}' - [G]\{u\} - [J]\{\theta\} = \{c\} \quad (25, 26)$$

式中:  $[G]$ 是式(23)和(24)中弯曲-扭转向量  $k$  的分量, 为元素的斜对称短阵。 $[J]$ 是式(24)中的斜对称矩阵。 $\{d\}$ 和 $\{c\}$ 是六个待定常数。积分式(25)和(26)再产生六个待定常数  $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 。经过复杂的代数计算, 可以求解出转角  $\theta$  和位移  $u$  如下:

$$\begin{aligned} \{\theta\} &= \left(\frac{1}{2}\{K\}\{K\}' + \frac{1}{2}[G]'[G]\text{Cosas} + \frac{1}{a}[G]\text{Sinas}\right)\{A\} \\ &+ \left(\frac{1}{2}\{K\}\{K\}' \cdot S + \frac{1}{2}[G]\right)\{d\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \{u\} &= \left(\frac{1}{2}\{K\}\{K\}' + \frac{1}{2}[G]'[G]\text{Cosas} + \frac{1}{a}[G]\text{Sinas}\right)\{B\} \\ &+ \left(-\frac{1}{3}\{K\}\{K\}'[J][G]'[G]\text{Sinas} - \frac{1}{4}(K_z[G]'[G] + [J][G]a^2)\text{Cosas}\right. \\ &+ \frac{K_z}{a^2}[G]S\text{Cosas} + \frac{1}{4}[K_z[G]'[G] + [J][G]a^2]' - \frac{K_z}{a^3}[G]'[G]SS\text{Sinas})\{A\} \\ &+ \left(-\frac{1}{4}([J][K][K]' - K_z[G]) + \frac{1}{4}([G][J][K][K]' + [K][K]'[J][G])S\right)\{d\} \\ &+ \frac{1}{2}\{K\}\{K\}'S + \frac{1}{2}[G]\{c\} \end{aligned} \quad (28)$$

式中:  $a = (K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)^{1/2}$ ,  $\{K\}' = [K_x \ K_y \ K_z]$ ,  $\{A\}$ 、 $\{B\}$ 、 $\{d\}$ 、 $\{c\}$ 为 12 个常数列阵。

## 5 单元矩阵

根据基本函数中的 12 个常数列向量,  $\{A\}$ 、 $\{B\}$ 、 $\{d\}$ 、 $\{c\}$ 很容易推导出单元的质量、刚度矩阵和载荷列阵。通过变换, 用单元的节点变量来表示单元矩阵。为此, 首先以矩阵形式表示式(27)和(28)如下:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \vdots \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \{u\} = [C]\{\bar{A}\} \quad (29)$$

这里  $\{\bar{A}\}^t = [\{A\}^t \{B\}^t \{d\}^t \{c\}^t]$ , 现用式(29)计算总势能的近似值如下:

$$\begin{aligned} U = & \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{2} [d_1 \ d_2 \ d_3] \begin{bmatrix} EI_x & & \\ & EI_y & \\ & & GI_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} dS \\ & + \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{2} [c_1 \ c_2 \ c_3] \begin{bmatrix} A_x G & & \\ & A_y G & \\ & & A_z E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} dS \\ & + \int_{s_1}^{s_2} \{\bar{A}\}^t [C]^t [F \ G]^t dS - \{\{A\}^t [C]^t [Q \ M]^t\}^t s_2^t \end{aligned} \quad (30)$$

可以看出, 在单元应变能中只出现  $d_i$  和  $c_i$  常数向量. 这正是所希望的, 因为  $A_i$  和  $B_i$  项是描述单元的刚体模式的. 因此, 根据参数  $(A_i, B_i, d_i, c_i)$  建立的刚度矩阵是十分稀疏的, 它仅仅在  $d_i$  和  $c_i$  的主对角元素上才有. 式(30)的第三和第四次形成单元的载荷列阵. 经积分后, 总势能可以表示为:

$$U = \frac{1}{2} \{A\}^t [K]_A \{A\} - \{A\}^t \{P\}_A \quad (31)$$

式中:  $[K]_A$  和  $\{P\}_A$  是根据参数  $[A_1 \ A_2 \ A_3 \cdots c_3]$  建立的单元刚度矩阵和载荷列阵.

关于质量矩阵, 可以根据动能  $T$  来求得:

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{2} \{\dot{\bar{A}}\}^t [m]_A \{\dot{\bar{A}}\} dS$$

式中:  $[m]_A$  是对角阵, 其前三项元素为单元的质量  $m$ , 后三项为单元的转动惯量  $j_x, j_y$  和  $j_z$ .

为用节点位移表示总势能  $U$  和动能  $T$ . 引入单元每个节点三个移动和三个转动自由度, 建立参数  $[A_1 \ A_2 \ A_3 \cdots c_3]$  和节点自由度  $[u_{x1} \ u_{y1} \ u_{z1} \cdots \theta_{z2}]$  的关系如下:

$$\{u\} = [N]\{\bar{A}\} \quad (32)$$

矩阵  $[N]$  可根据式(29)求得, 它是正方矩阵, 具有非奇异性, 能够求逆, 故(32)式可以如下表示:

$$\{A\} = [R]\{u\} \quad (33)$$

式中:  $[R] = [N]^{-1}$ , 将(33)式代入(31)式, 总势能为:

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^t [R]^t [K]_A [R] \{u\} - \{u\}^t [R]^t \{P\}_A \quad (34)$$

或

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [K]_u \{u\} - \{u\}^T \{P\}_u \quad (35)$$

式中:  $[K]_u = [R]^T [K]_A [R]$  和  $\{P\}_u = [R]^T \{P\}_A$ .

同样, 可以得到质量矩阵:  $[m]_u = [R]^T [m]_A [R]$ .

## 6 实 例

### 例 1. 直线形悬臂杆的固有频率计算

已知参数:  $K_x = K_y = K_z = 0$ , 长度  $l = 5\text{m}$ , 园形截面, 直径  $d = 0.3\text{m}$ , 弹性模量  $E = 68.13\text{GPa}$ , 剪切模量  $G = 25.61\text{GPa}$ , 密度  $\rho = 2882\text{Kg/m}^3$ . 一、二阶固有频率的计算结果见表 1. 从表中看出, 随着单元数的增加计算的固有频率收敛于分析结果.

表 1 直线悬臂杆的固有频率

固有频率 (rad/s)	单 元 数 目							分析结果
	1	2	3	4	5	6	7	
$W_1$	65.81	54.4	52.90	52.40	52.17	52.05	51.9	51.18
$W_2$	3971.46	544.11	379.80	351.50	340.05	334.20	330.80	316.97

### 例 2. 预扭悬臂杆的固有频率计算

已知参数:  $K_x = K_y = 0$ ,  $K_z = 1.5\pi/\text{m}$ ,  $l = 0.4\text{m}$ , 矩形截面, 面积  $A = 6.2 \times 10^{-3} \times 18.9 \times 10^{-3}\text{m}^2$ , 材料性质如例 1 所述, 计算结果见表 2, 可以看出计算结果与实测值十分接近.

表 2 预扭悬臂杆的固有频率

固有频率 (rad/s)	有限单元 (7 单元模式)	实测值
$W_1$	158.96	158
$W_2$	348.71	339.3

### 例 3. 半园弧形悬臂杆的固有频率计算

已知参数:  $K_x = K_z = 0$ ,  $K_y = 1.64\pi/\text{m}$ ,  $l = 0.61\text{m}$ , 矩形截面面积  $A$  与例 2 的相同, 其它条件也同前例. 第一阶是在园弧平面内的自由振动, 而第二阶是在垂直于园弧平面方向的振动. 计算结果见表 3. 再次看到结果令人满意.

表 3 半园弧形悬臂杆的固有频率

固有频率 (rad/s)	有限单元 (7 单元模式)	实测值
$W_1$	44.3	41
$W_2$	59.6	56

## 7 结 论

7.1 本文所导出的空间杆运动方程式, 具有相当大的概括性。该式既考虑了杆件的各种自然形状, 也考虑了剪切、弯曲、拉伸、扭转和和旋转惯量的各种变形。

7.2 当预扭转率不等于零时, 通过形状函数满足刚体模式, 是为建立杆件有限元模型的基本要素。

7.3 对于任意弯曲和扭转杆件, 确定其刚体和常应变模式, 并以其为基本函数形成空间杆件的单元矩阵。

7.4 通过分析三个不同形状杆件固有频率的实例, 看出, 计算值和实测值一致。正如所希望的, 计算值大于精确值, 但随着单元数目的增加收敛于精确值。

## 参 考 文 献

- (1) LEE HWA-PING 1969 American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 7. Generalized Stiffness matrix of a curved beam element
- (2) B.A.H.ABBAS 1979 The Aeronautical Journal 83. Simple finite elements of dynamic analysis of thin pre-twisted blades
- (3) J.E.MOTTERSHEAD 1980 International Journal of Mechanical Sciences 22, 267-283, Finite elements for dynamical analysis of helical rods
- (4) 杨镇, 唐恒龄, 廖伯瑜. 机床动力学. 机械工业出版社
- (5) 孙靖民. 机床结构计算的有限元法. 机械工业出版社

## Finite Element Analysis of Dynamics of Spatially Curved and Twisted Rods

Yi Hengjie

(Department of Mechanical Engineering, ZhengZhou Institute of Technology)

B. Tabarrok

(Department of Mechanical Engineering, University of Toronto, Canada)

**Abstract:** For spatially curved and twisted rods a set of governing equations are derived in terms of three translational and three rotational degree of freedom. By solving the strain-displacement relations for constant and zero states of strain the rigid body and constant strain modes of the rod are obtained. These displacement modes are then used as basis functions for development of a finite element model, three examples are analyzed for free vibrations. Satisfactory agreement is observed for several modes of vibrations.

**Keywords:** Equilibrium equation, Kinematics, Elemental matrices, Finite element method