

特解边界元法及其在若干问题中的应用*

李庆斌 周鸿钧 林泉

(郑州工学院)

(大连理工大学)

摘 要: 本文提出一种处理边界元域内积分项的普通方法,使得该问题在利用其对应齐次方程的基本解的基础上,将域内积分化为边界积分来处理,节省了工作量。实例计算表明,该方法的精度满足要求。

关键词: 特解边界元, 位势, 自重, 自由振动, 瞬态反应

边界单元法作为一种有效的数值解法,在工程的许多方面得到了广泛的应用,而且在某些方面相当成熟。但是,由于工程问题的复杂性,所对应的数学模型也相当复杂。为了解决这个问题,从边界元法本身来说,其困难主要在于寻找该问题对应的基本解问题上。寻找问题的基本解是一个严峻的数学问题,有时无法求得问题的基本解,有时所求得的基本解形式极为复杂,给程序设计及处理奇异积分带来较大的困难。因此,就工程实际而言,能在原有基本解的基础上,对问题做一些近似处理,最终得到满足精度要求的计算结果来,将具有较大的意义。然而,这个设想能否实现呢?这正是本文要解决的具体问题。

1 方法基本原理

设某问题满足微分方程: $L(u_i) + h_i = 0$ (1)

对应的齐次方程: $L(u_i) = 0$ (2)

式中: L —线性微分算子,对不同的问题具有不同的表现形式。

u_i —微分方程的特征参量表示符,可以是位移或速度势等。

h_i —非齐次项,可以是常数项或函数表达式。

假设求得满足方程(2)的解为 u_i^c , 即有:

$$L(u_i^c) = 0 \quad (3)$$

还求得满足方程(1)的一个特解为 u_i^p , 即有:

* 收稿日期: 1988.06.02

$$L(u_i^p) + h_i = 0 \quad (4)$$

根据数学原理, 问题(1)所对应的真实解 u_i , 可以表示成方程(3)、(4)解的和, 即:

$$u_i = u_i^c + u_i^p \quad (5)$$

进而有:

$$\delta u_i = \delta u_i^c + \delta u_i^p \quad (6)$$

其中, δ 所表示的量是与 u_i 的微分项有关的变量.

根据边界元法的基本原理, 我们可以求出方程(3)的用矩阵表示的边界元方程为:

$$[H]\{u^c\} = [G]\{\delta u^c\} \quad (7)$$

式中, $[H]$ 、 $[G]$ 是与问题几何参数有关的系数矩阵, $\{u^c\}$ 、 $\{\delta u^c\}$ 是由 u_i^c 、 δu_i^c 组成的列向量.

再把式(5)、(6)的矩阵形式引入到方程(7)中, 得到:

$$[H]\{u\} - [G]\{\delta u\} = [H]\{u^p\} - [G]\{\delta u^p\} \quad (8)$$

由于我们已经求出 u_i^p , 依此可以求出对应的列向量 $\{u^p\}$ 和 $\{\delta u^p\}$, 所以方程(8)右端全部已知, 这样我们便可以利用普通边界单元法进行计算, 从而得到边界上的所有参量, 利用同样的处理, 可以求得域内点的需求值.

这就是特解边界元法的基本思想方法.

2 定常位势问题

$$\text{对于方程: } \nabla^2 \varphi - B = 0 \quad (9)$$

其中, φ 是位势函数, B 为非齐次项.

$$\text{对应的齐次方程为: } \nabla^2 \varphi = 0 \quad (10)$$

如果已求得 φ^c 及 φ^p , 分别满足:

$$\nabla^2 \varphi^c = 0 \quad (11)$$

$$\text{及 } \nabla^2 \varphi^p - B = 0 \quad (12)$$

$$\text{那么有: } \varphi = \varphi^c + \varphi^p \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^c}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^p}{\partial n} \quad (14)$$

如果已求得方程(11)的边界元方程为:

$$[H]\{\varphi\} - [G]\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} = [H]\{\varphi^p\} - [G]\left\{\frac{\partial \varphi^p}{\partial n}\right\} \quad (16)$$

对方程(16)引入问题的边界条件, 求解后可以得到边界值 φ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

对于域内点我们有方程:

$$\varphi_i^c + [\bar{H}]\{\varphi^c\} = [G]\left\{\frac{\partial \varphi^c}{\partial n}\right\} \quad (17)$$

其中: φ_i^c 表示对应方程(11)的域内点位势, $[\bar{H}]$ 表示的是当 $[H]$ 不计入与边界几何特性有关的常数阵时的矩阵。

$$\varphi_i - \varphi_i^p + [\bar{H}](\{\varphi\} - \{\varphi^p\}) = [G]\left(\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} - \left\{\frac{\partial \varphi^p}{\partial n}\right\}\right)$$

整理后可得域内点位势为:

$$\varphi_i = \varphi_i^p + [G]\left(\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} - \left\{\frac{\partial \varphi^p}{\partial n}\right\}\right) - [\bar{H}](\{\varphi\} - \{\varphi^p\}) \quad (18)$$

利用同样方法, 微分一次后, 可以求得域内点的位势导数。

对于方程(9)中的非齐次项 B 为坐标的一次函数的情形。即:

$$B = a + bx + cy \quad (19)$$

我们已经求得:

$$\varphi^p = \frac{b}{6}x^3 + \frac{a}{4}x^2 + \frac{c}{6}y^3 + \frac{a}{4}y^2 \quad (20)$$

$$\text{及: } \frac{\partial \varphi^p}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^p}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi^p}{\partial y} n_y \quad (21)$$

其中:

$$\frac{\partial \varphi^p}{\partial x} = \frac{b}{2}x^2 + \frac{a}{2}x$$

$$\frac{\partial \varphi^p}{\partial y} = \frac{c}{2}y^2 + \frac{a}{2}y$$

n_x 、 n_y —— 边界点的两个方向导数。

3 带有体力的弹性问题

对于静弹性力学问题:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad (22)$$

其中 B_i 为体力项。

如果我们记齐次方程的解用右上角 c 表示, 特解用右上角 p 表示, 那么:

仍有:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^c + \sigma_{ij}^p \\ u_i &= u_i^c + u_i^p \\ t_i &= t_i^c + t_i^p \end{aligned} \quad (23)$$

利用与上节中相似的处理, 可以得到边界元方程为:

$$[H](\{u\} - \{u^p\}) = [G](\{t\} - \{t^p\}) \quad (24)$$

同样, 可以相似地求出域内点的位移和应力来。对于体力项为坐标的线性函数情形, 即:

$$\begin{cases} B_1 = a_0 + a_1 x + a_2 y \\ B_2 = b_0 + b_1 x + b_2 y \end{cases} \quad (25)$$

已经求得: $\sigma_{11}^p = \varphi_1 + \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_2$

$$\sigma_{22}^p = \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_1 + \varphi_2 \quad (26)$$

$$\sigma_{12}^p = \varphi_3 + \varphi_4$$

$$u_i^p = \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} \Gamma_i + \frac{1}{\mu} P_i \quad (27)$$

$$\text{式中: } \begin{cases} \varphi_1 = -a_0 x - a_1 x^2 / 2 \\ \varphi_2 = -b_0 y - b_2 y^2 / 2 \\ \varphi_3 = -a_2 y^2 / 2 \\ \varphi_4 = -b_1 x^2 / 2 \\ \Gamma_1 = -b_0 x^2 / 2 - a_1 x^3 / 6 \\ \Gamma_2 = -b_0 y^2 / 2 - b_2 y^3 / 6 \\ P_1 = -a_2 y^3 / 6 \\ P_2 = -b_1 x^3 / 6 \end{cases} \quad (28)$$

ν —泊松比;

μ —剪切弹模。

利用相同的方法, 还可以处理温度效应问题, 限于篇幅, 这里从略。

4 自由振动问题

对于均质的各向同性弹性体, 在简谐振动时, 其控制方程为:

$$(\lambda + \mu) u_{i,jj} + \mu u_{i,ii} + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (29)$$

其中, λ 、 μ 为拉梅常数。

为书写方便, 我们将其表示为:

$$L(u_i) + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (30)$$

如果已求得 u_i^c 、 u_i^p , 分别满足:

$$L(u_i^c) = 0 \quad (31)$$

$$L(u_i^p) + \rho \omega^2 u_i^p = 0 \quad (32)$$

并将域内未知位移 u_i 表示为:

$$u_i(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{ik}(x, \xi^m) \varphi_k(\xi^m) \quad (33)$$

式中: φ_k = 待定参数;

$$C_{ik}(x, \xi^m) = (R - r) \delta_{ik} \quad (34)$$

其中: R = 边界上所有节点间的最大距离;

r = 边界上任意两点的距离;

δ_{ik} = 克罗耐克 δ 。

方程(33)还可以写成矩阵形式:

$$\{u\} = [P]\{\varphi\} \quad (35)$$

当 $[P]$ 可逆时, 还可写成:

$$\{\varphi\} = [K]\{u\} \quad (36)$$

其中, $[K] = [P]^{-1}$ 。

同样, 可以将真实位移和面力表示为:

$$\begin{cases} u_i = u_i^c + u_i^p \\ t_i = t_i^c + t_i^p \end{cases} \quad (37)$$

我们把(33)式代入方程(32), 可以求得:

$$u_i^p(x) = \rho \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} D_{ik}(x, \xi^m) \varphi_k(\xi^m) \quad (38a)$$

$$\text{写成矩阵形式: } \{u^p\} = \rho \omega^2 [D]\{\varphi\} \quad (38b)$$

$$D_{ik}(x, \xi^m) = \frac{1}{\mu} [(C_1 r - C_2 R) \delta_{ik} r^2 - C_3 Y_i Y_k r] \quad (39)$$

其中: $Y_i = x_i - \xi_i^m$

$$C_1 = [2(d+3)(1-\nu) - 1] / 18(3d-1)(1-\nu)$$

$$C_2 = (1-2\nu) / 2[(1+d) - 2\nu d]$$

$$C_3 = 1 / 2(1-\nu)(d^2 + 4d + 3)$$

ν = 泊松比;

d = 问题的维数, 对于二维问题 $d = 2$ 。

另外, 利用弹性力学基本定律, 可以求得:

$$t_i^p = \rho \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} T_{ik}(x, \xi^m) \varphi_k(\xi^m) \quad (40a)$$

或写成矩阵形式:

$$\{t^p\} = \rho \omega^2 [T]\{\varphi\} \quad (40b)$$

$$T_{ik}(x, \xi^m) = (C_4 r - C_5 R) Y_i n_k + (C_6 r - 2C_2 R) Y_k n_i$$

$$+ [(C_6 r - 2C_2 R)\delta_{ik} - \frac{2C_3 Y_i Y_k}{r}] Y_i n_i \quad (41)$$

其中: $C_4 = [(d+3)v - 1] / [3(3d-1)(1-v)]$

$$C_5 = 2v / [(1+d) - 2vd]$$

$$C_6 = [(d+2) - (d+3)v] / 3(3d-1)(1-v)$$

方程(31)对应的边界元方程为:

$$[H]\{u^c\} - [G]\{t^c\} = \{0\} \quad (42)$$

将(37)式、(38b)式、(40b)式和(36)式代入(41)式, 得到:

$$[H]\{u\} - [G]\{t\} = \rho\omega^2 ([H][D] - [G][T])[K]\{u\} \quad (43)$$

$$\text{或写成: } [H]\{u\} - [G]\{t\} = \omega^2 [M]\{u\} \quad (43)$$

引入边界条件后, 可将其化为特征值方程:

$$[A]\{x\} = \omega^2 [\bar{M}]\{x\} \quad (45)$$

解此方程可以得到问题的自振频率及相应的振型。

5 瞬态动力反应问题

$$\text{控制方程为: } L(u_i) - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (46)$$

其中 L 算子的表现形式与方程(30)相同。

如果已求得 u_i^c 、 u_i^p , 分别满足:

$$L(u_i^c) = 0 \quad (47)$$

$$L(u_i^p) - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (48)$$

并设域内加速度 \ddot{u}_i 可以表示为:

$$\ddot{u}_i(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{ik}(x, \xi^m) \ddot{\phi}_k(\xi^m) \quad (49)$$

其中, $\ddot{\phi}_k$ 为待定系数, C_{ik} 与方程(33)相同。

将(48)式写成矩阵形式:

$$\{\ddot{u}\} = [P]\{\ddot{\phi}\} \quad (50)$$

当 $[P]$ 是方阵可逆时, 还可改写成:

$$\{\ddot{\phi}\} = [K]\{\ddot{u}\} \quad (51)$$

其中 $[K] = [P]^{-1}$ 。

同样可以将真实位移和面力表示为:

$$\begin{cases} u_i = u_i^c + u_i^p \\ t_i = t_i^c + t_i^p \end{cases} \quad (52)$$

把(48)式代入(49)式, 可以求得:

$$u_i^p(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} D_{ik}(x, \xi_m) \ddot{\varphi}_k(\xi_m) \quad (53)$$

式中 D_{ik} 与(39)式相同。

另外, 利用弹性力学基本定律, 可以求得面力为:

$$t_i^p = - \sum_{m=1}^{\infty} T_{ik}(x, \xi_m) \ddot{\varphi}_k(\xi_m) \quad (54)$$

式中 T_{ik} 与(41)式相同。

可以知道, 方程(47)对应的边界元方程为:

$$[H]\{u^c\} - [G]\{t^c\} = \{0\} \quad (55)$$

将(52)式代入方程(55), 得到:

$$[H]\{u\} - [G]\{t\} = [H]\{u^p\} - [G]\{t^p\} \quad (56)$$

再把(52)式和(53)式分别写成矩阵形式:

$$\{u^p\} = \rho[D]\{\ddot{\varphi}\} \quad (57)$$

$$\{t^p\} = \rho[T]\{\ddot{\varphi}\} \quad (58)$$

然后把(57)式, (58)式代入(56)式, 并考虑到(51)式, 最终得到:

$$[H]\{u\} - [G]\{t\} = \rho([H][D] - [G][T])[k]\{\ddot{u}\} \quad (59)$$

$$\text{或将其改写为: } [M]\{\ddot{u}\} + [H]\{u\} = [G][t] \quad (60)$$

这就是所求的瞬态振动情况下的振动仿真方程, 引入边界上作用的力和位移边界条件及初始条件, 利用普通的振动仿真方法, 可以求得瞬态振动力反应。

6 计算实例

利用边界元特解法计算问题时, 只需对原来的普通边界元程序稍加修改, 就可方便地设计程序。利用本法计算了许多例子, 但限于篇幅, 这里仅给出有关动力计算方面例子。某一 $10 \times 8\text{m}$ 的悬臂深梁, 材料参数 $E/\rho = 10^4$, $\nu = 0.2$, 用本法计算出的自振周期列于表1, 可以看出两者结果符合较好。

表1 悬臂深梁计算周期

方法	振 型			
	1	2	3	4
文(5)	0.416	0.225	0.210	0.113
本文	0.430	0.212	0.191	0.109

某 $2 \times 4\text{m}$ 的深梁, 自由端受脉冲剪力作用, 材料参数 $E = 10^5\text{T/m}^2$, $\nu = 0.25$, $\gamma = 1.0\text{T/m}^3$, 计算出自由端中点A的动力

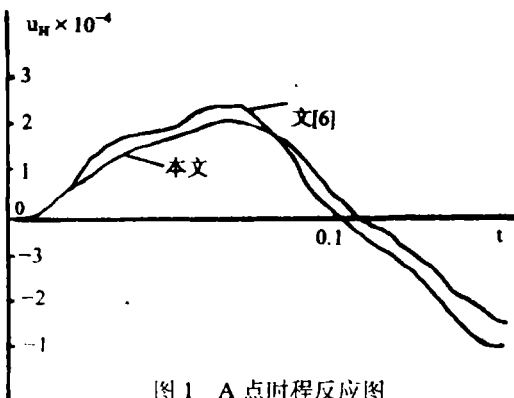


图1 A点时程反应图

时程反应示于图 1 中。

7 结 语

本文提出的边界元特解法, 可以处理一大类利用原来的基本解不能解决的问题, 而且处理方便, 精度满足要求。这就为工程应用提供了方便的途径。

作者对上述提出的问题逐一进行了计算, 效果良好, 特别是在振动问题中的应用极为方便, 较其他方法节省了大量工作量。限于篇幅, 这里没给出实例。

致谢: 李宗坤同志提供了自振计算实例, 特此致谢。

参 考 文 献

- (1) Shahid Ahmad & Prasanta K. Banerjee. Free Vibration Analysis by BEM Using Particular Integrals. J.Eng.Mech., 1986.10
- (2) 沈家荫, 张扬. 边界单元法若干问题的探讨. 华东水利学院学报, 1985.2
- (3) 李庆斌, 周鸿钧. 用边界单元法计算重力坝的自振特性. 郑州工学院学报, Vol.8 No.1, 1987.3
- (4) Zhou Hongjun, Li Qingbin & Wang Fuming. Boundary Element Method for Coupled Vibration Analysis of Dam-Water System. Proc. 3rd Int. Conf. Soil Dyn. & Earthq. Eng., USA, 1987.6
- (5) D.Nardini & C.A.Brebbia. A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Element. Proc. 4th Int. Conf. BEM, 1982
- (6) D.Nardini & C.A.Brebbia. Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method. Proc. 5th Int. Conf. BEM, 1983

Particular Solution Boundary Element Method And Its Application on Several Problems

Li Qingbin Zhou Hongjun Lin Gao
(ZhengZhou Inst. of Tech.) (Dalian Univ. of Tech.)

Abstract: A general method is presented, which can deal with internal integral terms using boundary element method. Based on the fundamental solution of the corresponding complete equation, this method can make the internal integral become the boundary integral. In this paper, Several examples are presented, and the results indicate that the method presented here has better precision.

Keywords: Particular Solution Boundary Element Method, Potential Gravity, Free Vibration, Transient response