第10卷 第4期　　郑州工学院学报　　Vol.10 No.4
1989年 12月　　Journal of ZhengZhou Institute of Technology　　Dec. 1989

复合型裂纹的脆性断裂应变能密度因子理论的精确解法

尹华杰

（化工系）

提　要：本文采用配方法，导出了采用应变能密度因子理论求解复合型裂纹脆性断裂角的精确公式。该公式为四次方程，可用公式法求出精确解，为处理全复合型裂纹的扩展问题，得到了精确、简便的计算方法。

关键词：应变能密度因子，复合型裂纹，断裂角

1　应变能密度因子理论简介

应变能密度因子理论是 Sih 首先提出来的。它是一种基于局部应变能密度场的断裂理论。该理论计算简单，适用性广，其最大特点是可以处理复合型裂纹的扩展问题[1][2]。

对任意载荷作用下的的三维裂纹问题，可以证明，在裂尖局部区的应变能密度为[2]：

$$W=\frac{1}{r}(a_{11}\cdot K_{I}^{2}+2a_{12}K_{I}\cdot K_{II}+a_{22}\cdot K_{II}^{2}+a_{33}\cdot K_{III}^{2}) \tag{1}$$

应变能密度因子为：

$$S=a_{11}\cdot K_{I}^{2}+2a_{12}K_{I}\cdot K_{II}+a_{22}\cdot K_{II}^{2}+a_{33}\cdot K_{III}^{2} \tag{2}$$

以上两式中的系数分别为：

$$a_{11}=\frac{1}{16\pi\mu}[(3-4\nu-\mathrm{Cos}\theta)\cdot(1+\mathrm{Cos}\theta)];$$

$$a_{12}=\frac{1}{16\pi\mu}(2\mathrm{Sin}\theta)\cdot[\mathrm{Cos}\theta-(1-2\nu)];$$

$$a_{22}=\frac{1}{16\pi\mu}[4(1-\nu)(1-\mathrm{Cos}\theta)+(1+\mathrm{Cos}\theta)(3\mathrm{Cos}\theta-1)];$$

$$a_{33}=\frac{1}{4\pi\mu};$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)};$$

ν——泊松比；

θ——复合型裂纹的断裂角；

①收到日期：1988.11.21

E— —材料的弹性模量.

以上公式用于平面应力问题时，需用$\frac{\nu}{1+\nu}$代替 ν，μ 不变.

该理论在预测裂纹扩展时假设:①裂纹沿着应变能密度因子最小的方向开始扩展;②裂纹的扩展是由于最小应变能密度因子达到材料相应的临界值 S_c 时发生的[1]．根据这两个假设，可以建立相应的断裂判据为:

$$S_{min}=S_c \tag{3}$$

其断裂角的方向可由:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta}=0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}>0 \tag{4.2}$$

确定.

2　断裂角公式的导出及其解应满足的条件

为了导出求解断裂角的公式，我们首先求解$\frac{\partial S}{\partial \theta}$，把各系数代入式(2)，然后对 θ 求导得:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta}=\frac{1}{8\pi\mu}\{[\mathrm{Cos}\theta-(1-2\nu)]\cdot\mathrm{Sin}\theta\cdot K_{\mathrm{I}}^2+2[\mathrm{Cos}^2\theta-\mathrm{Sin}^2\theta-(1-2\nu)\mathrm{Cos}\theta]\cdot K_{\mathrm{I}}\cdot K_{\mathrm{II}}+[(1-2\nu)-3\mathrm{Cos}\theta]\mathrm{Sin}\theta\cdot K_{\mathrm{II}}^2\} \tag{5}$$

将它代入式(4.1)，并令：$\alpha=\frac{K_{\mathrm{I}}}{K_{\mathrm{II}}}$，经整理后得:

$$(\alpha^2-3)\cdot\mathrm{Sin}\theta\cdot\mathrm{Cos}\theta+(1-2\nu)(1-\alpha^2)\cdot\mathrm{Sin}\theta=2\alpha(1-2\nu)\cdot\mathrm{Cos}\theta-4\alpha\cdot\mathrm{Cos}^2\theta+2\alpha$$

上式两端同时平方，并注意利用$\mathrm{Sin}^2\theta=1-\mathrm{Cos}^2\theta$，把方程改写成仅含$Cos\theta$的形式得:

$$A(\alpha)Cos^4\theta+B(\alpha)Cos^3\theta+C(\alpha)Cos^2\theta+D(\alpha)Cos\theta+E(\alpha)=0 \tag{6}$$

式中：$A(\alpha)=(\alpha^2+1)\cdot(\alpha^2+9)$;

$B(\alpha)=-2(1-2\nu)(\alpha^2+1)(\alpha^2+3)$;

$C(\alpha)=(\alpha^2+1)\cdot[(1-2\nu)^2(\alpha^2+1)-(\alpha^2+9)]$;

$D(\alpha)=2(1-2\nu)(\alpha^4+3)$;

$E(\alpha)=4\alpha^2-(1-2\nu)^2(1-\alpha^2)^2$.

(6)式亦可写成:

$$\mathrm{Cos}^4\theta+b(\alpha)\mathrm{Cos}^3\theta+c(\alpha)\mathrm{Cos}^2\theta+d(\alpha)\mathrm{Cos}\theta+e(\alpha)=0 \tag{7}$$

式中：$b(\alpha)=-\frac{2(1-2\nu)(\alpha^2+3)}{\alpha^2+9}-1$

$$c(\alpha)=\frac{(1-2\nu)^2(\alpha^2+1)}{\alpha^2+9}-1$$

$$d(\alpha)=\frac{2(1-2\nu)(\alpha^4+3)}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)}$$

$$e(\alpha)=\frac{4\alpha^2-(1-2\nu)^2(1-\alpha^2)^2}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)}$$

由式(6)或(7)可见，它们是实系数 $\mathrm{Cos}\theta$ 的四次方程．根据阿贝尔定理，恰好可用一般的代数解法，由方程的系数求解出方程的精确解．其具体解法参考文献[3].

(5)式对 θ 再求导得：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}=\frac{1}{8\pi\mu}\{[2\mathrm{Cos}^2\theta-1-(1-2\nu)\cdot\mathrm{Cos}\theta]\cdot K_{\mathrm{I}}^2+2\mathrm{Sin}\theta[(1-2\nu)-4\mathrm{Cos}\theta]\cdot K_{\mathrm{I}}\cdot K_{\mathrm{II}}+[3+(1-2\nu)\mathrm{Cos}\theta-6\mathrm{Cos}^2\theta]\cdot K_{\mathrm{II}}^2\}$$

$$=\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{8\pi\mu}\{[2\mathrm{Cos}^2\theta-1-(1-2\nu)\mathrm{Cos}\theta]\alpha^2+2\mathrm{Sin}\theta[(1-2\nu)-4\mathrm{Cos}\theta]\alpha+[3+(1-2\nu)\mathrm{Cos}\theta-6\mathrm{Cos}^2\theta]\} \tag{8}$$

实验和最大周向应力理论均表明，对于剪应力为正号的问题，断裂角 θ 为负角[1]．这时 $K_{\mathrm{II}}>0$:

$$\mathrm{Sin}\theta=-\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2\theta}$$

(8)式可改写成：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}=\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{8\pi\mu}\{[2\mathrm{Cos}^2\theta-1-(1-2\nu)\mathrm{Cos}\theta]\alpha^2-2\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2\theta}[(1-2\nu)-4\mathrm{Cos}\theta]\alpha+[3+(1-2\nu)\mathrm{Cos}\theta-6\mathrm{Cos}^2\theta]\} \tag{9}$$

当剪应力为负号时，$K_{\mathrm{II}}<0$，断裂角θ为正角，此时：

$$\mathrm{Sin}\theta=\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2\theta}$$

(8)式可改写成：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}=\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{8\pi\mu}\{[2\mathrm{Cos}^2\theta-1-(1-2\nu)\mathrm{Cos}\theta]\alpha^2+2\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2\theta}[(1-2\nu)-4\mathrm{Cos}\theta]\alpha+[3+(1-2\nu)\mathrm{Cos}\theta-6\mathrm{Cos}^2\theta]\} \tag{10}$$

由(6)或(7)式求解出的四个根，当满足：①$\mathrm{Cos}\theta_0$ 为实数；②$|\mathrm{Cos}\theta_0|<1$；③$\mathrm{Cos}\theta_0$ 代入(8)或(9)或(10)式后，大于零；④$\mathrm{Cos}\theta_0$ 代入(2)式求得的 S，使 S 最小这四个条件时，其解才是问题的解．不满足以上四个条件的解为虚解，舍去．由解出的 $\mathrm{Cos}\theta_0$ 求解断裂角 θ_0 值时，应满足：①$\frac{-\pi}{2}<\theta_0<\frac{\pi}{2}$；②$K_{\mathrm{II}}>0$ 时，$\theta_0<0$；③$K_{\mathrm{II}}<0$ 时，$\theta_0>0$.

3 断裂判据

当已知 K_{IC} 时:

$$S_C = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu} K_{IC}^2 \text{ [1]}$$

把满足(4)式和其它三个条件的 $\cos\theta_0$ 代入(2)式可得 S_{min}，然后代入(3)式，就得到了全复合型裂纹脆性断裂的断裂判据。为了计算时方便，根据 $K_{II}>0$ 或 $K_{II}<0$ 两种不同情况，分别把系数 a_{12} 的 $\sin\theta$ 改写成用 $\cos\theta$ 表示。当 $K_{II}>0$ 时:

$$a_{12} = -\frac{1}{16\pi\mu}(2\sqrt{1-\cos^2\theta})\cdot[\cos\theta-(1-2\nu)]$$

当 $K_{II}<0$ 时:

$$a_{12} = \frac{1}{16\pi\mu}(2\sqrt{1-\cos^2\theta})\cdot[\cos\theta-(1-2\nu)]$$

4 计算示例

4.1 纯Ⅰ型情况

这种情况下，$K_{II}=K_{III}=0$，$\alpha=\frac{K_I}{K_{II}}\to\infty$；式(7)的系数为：$b=-2(1-2\nu)$；$c=(1-2\nu)^2-1$；$d=2(1-2\nu)$；$e=-(1-2\nu)^2$。式(7)成为:

$$\cos^4\theta-2(1-2\nu)\cos^3\theta+[(1-2\nu)^2-1]\cos^2\theta+2(1-2\nu)\cos\theta-(1-2\nu)^2=0$$

整理后得:

$$(\cos^2\theta-1)[\cos\theta-(1-2\nu)]^2=0$$

其解为:

$$\cos\theta_0=\pm 1; \quad \cos\theta_0=1-2\nu.$$

均为实数，且 $|\cos\theta_0|<1$，因 $\alpha\to\infty$，利用(8)式判别二阶导数的正、负较方便。只有 $\cos\theta_0=\pm 1$ 能使 $\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}>0$，由 $-\frac{\pi}{2}<\theta_0<\frac{\pi}{2}$ 的条件得:

$$\theta_0=0°$$

代入(2)式得:

$$S_{min}=\frac{1-2\nu}{4\pi\mu}K_I^2$$

4.2 纯Ⅱ型情况

这种情况下，$K_I=K_{III}=0$，$\alpha=\frac{K_I}{K_{II}}=0$；式(7)的系数为：$b=\frac{-2(1-2\nu)}{3}$；$c=(\frac{1-2\nu}{3})^2-1$；$d=\frac{2(1-2\nu)}{3}$；$e=-(\frac{1-2\nu}{3})^2$。代入(7)式经整理后得:

$$(\mathrm{Cos}^2\theta-1)[\mathrm{Cos}\theta-\frac{(1-2\nu)}{3}]^2=0$$

其解为：

$$Cos\theta_0=\pm 1;\qquad Cos\theta_0=\frac{1-2\nu}{3}.$$

均为实数，且$|\mathrm{Cos}\theta_0|<1$。把以上结果代入式(8)或(9)或(10)，可见仅有$\mathrm{Cos}\theta_0=\frac{1-2\nu}{3}$使$\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}>0$，所以：

$$\theta_0=\mathrm{arcCos}(\frac{1-2\nu}{3})$$

代入(2)式得：

$$S_{min}=\frac{K_{II}^2}{12\pi\mu}[2(1-2\nu)-\nu^2]$$

4.3　纯Ⅲ型情况

这种情况下，$K_I=K_{II}=0$，α是$\frac{0}{0}$不定型。从(2)式可见纯Ⅲ型问题S与θ无关。实验表明，纯Ⅲ型问题，$\theta_0=0°$。其S_{min}由(2)式计算为：

$$S_{min}=\frac{1}{4\pi\mu}K_{III}^2$$

4.4　Ⅰ－Ⅱ－Ⅲ混合型情况

设，$K_I=K_{II}$，$\alpha=\frac{K_I}{K_{II}}=1$，$\mu=0.3$。这时：$b=-0.32$；$c=-1$；$d=0.16$；$e=0.2$。

代入(7)式得：

$$\mathrm{Cos}^4\theta-0.32\mathrm{Cos}^3\theta-\mathrm{Cos}^2\theta+0.16\mathrm{Cos}\theta+0.2=0$$

解此方程得：

$$Cos\theta_0=-0.4786002,\qquad Cos\theta_0=-0.7705641;$$

$$Cos\theta_0=0.9402013,\qquad Cos\theta_0=0.628963.$$

代入(9)式后，前两个为负值的$\mathrm{Cos}\theta_0$使$\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}<0$，不满足条件，舍去。后两个$\mathrm{Cos}\theta_0$为正值均使$\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}>0$，再分别把它们代入(2)式求得：

①$\mathrm{Cos}\theta_0=0.9402013$时：　$S=\frac{4.6319452K_{II}^2}{16\pi\mu}+\frac{K_{III}^2}{4\pi\mu}$

②$\mathrm{Cos}\theta_0=0.628963$时：　$S=\frac{3.6791733K_{II}^2}{16\pi\mu}+\frac{K_{III}^2}{4\pi\mu}$

可见只有$\mathrm{Cos}\theta_0=0.628963$时，使S取最小值：

$$S_{min}\doteq\frac{1}{\mu}(0.0732K_{II}^2+0.0796K_{III}^2)$$

断裂角:

$$\theta_0 = -51.026°$$

5 结　　论

5. 1　本文通过配方法把较难求解的三角函数方程，化成了四次代数方程，使求极值运算可通过公式法，运用简单的代数运算，求得精确解．由于配方后，方程幂次增加，使求解得到多余的不符合物理实际的根，本文给出了相应的判别方法．采用本文方法，利用应变能密度因子理论，求解复合型裂纹脆性断裂的问题，计算简单，概念明确，数值精确．解决了以前须用数值方法计算只能得到近似解、且工作量大的问题．

5. 2　由本文得到的结果可清楚看出，K_{III}不影响断裂角的大小，只影响应变能密度因子的数值．

5. 3　应变能密度因子理论在计算全复合型裂纹的扩展问题方面，较最大能量释放率理论简单、概念清晰，而且与实验结果基本一致[2]．而最大周向应力理论只能计算平面问题．因此，本文解决应变能密度因子理论的精确求解，并得到较简单的计算和工作量较少的方法，对这一理论的工程应用将有一定的意义．

参　考　文　献

【1】　高庆主编．　工程断裂力学．　重庆大学出版社．　1986年

【2】　徐振兴编．　断裂力学．　湘潭大学．　1985年

【3】　《数学手册》编写组．　数学手册．　人民教育出版社．　1979年

The Method of A Exact Culculation for the Theory of Strain Energy Density Factor Which Belong With Fragile Fracture of Compound Crack

Yin Huajie

(Department of Chemical Engineering)

Abstract: In this paper, the formula of a exact solution for the fracture angle of the fragile fracture of compound crack is got by use of the fitting square method,which is determined by the theory of strain energy density factor. This formula is a four–order equation. It's exact solution is determined by the formula method. A exact, simple and convenient calculation method is obtained for solving the problem of full compound crack.

Keywords: strain energy density factor, compound crack, fracture angle