

平面回转误差运动的仿真分析

黄仁贵

(机械系)

提 要: 本文首先推导出由标准球心径向误差运动中 K 次分量而产生的表征转轴平面回转运动特性的四种曲线方程, 并简单地讨论了它们的几何形状。然后证明了 K 次分量产生的动、静轮转曲线的几何形状分别与 $(I-K)$ 次分量产生的静、动轮转曲线完全相同。这为分析研究回转精度提供了新的途径。

关键词: 主轴、回转误差、仿真分析

1 平面回转运动特性曲线

在转轴回转精度测试中, 采用双向法测得标准球心的位置信号为 $X_0(t)$ 、 $Y_0(t)$, 它们一般为非周期函数 (见图 1)。标准球球心径向误差运动可以表示为:

$$F(t) = X_0(t) + jY_0(t) \quad (1)$$

可以证明, $F(t)$ 又可写为下面形式:

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(t) \quad (2)$$

$$F_k(t) = R_k e^{jK\omega t} = R_k e^{jm_0 t} \quad (3)$$

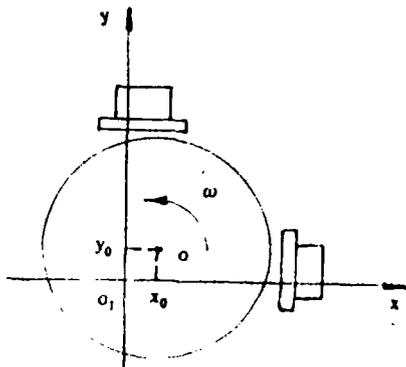


图 1

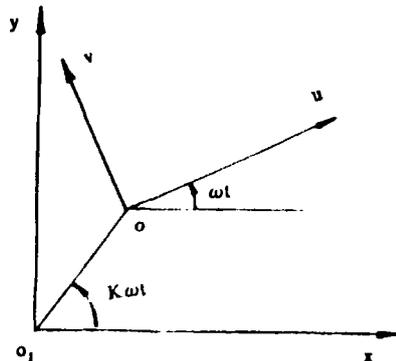


图 2

①收到日期: 1989.06.06

式中, $F_K(t)$ 为 $F(t)$ 的 K 次分量, K 为 $(-\infty, \infty)$ 上的任意实数, ω 为转轴的角速度, R_K 为 K 次分量的模, $\omega_0 = K\omega$ 为 K 次分量绕原点 O_1 的转动角速度。根据式(1), 由式(3)得 K 次分量在坐标系 XO_1Y 上的投影为:

$$\begin{cases} X_K(t) = R_K \cos K\omega t \\ Y_K(t) = R_K \sin K\omega t \end{cases} \quad (4)$$

如图 2 所示。取静坐标系 XO_1Y , 原点 O_1 为双向测得标准球心位置信号为零的点。取动坐标系 UOV , 其固定在转轴的回转平面上, 原点 O 为球心, 转轴的转角速度为 ω , 其转向逆时针为正。显然, 转轴的平面回转运动可以看成回转平面以角速度 ω 绕球心作转动, 同时随球心作平动。

根据运动学的瞬心概念, 转轴的平面回转运动可以用一对瞬心线来描述, 即动瞬心线在静瞬心线上以角速度 ω 作纯滚动与转轴的平面回转运动是等同的。文献[1]根据微分几何学原理得到了转轴平面回转运动的静瞬心线和动瞬心线方程, 同时还得到了定点在转轴回转平面上描绘的曲线—动轮转曲线的方程, 以及转轴上一点在静坐标系上描绘的曲线—静轮转曲线的方程。这四种曲线表征了转轴平面回转运动的特性。在切削加工中, 静轮转曲线相当于刀具回转型机床(如镗床)刀具的加工曲线; 而动轮转曲线, 则相当于工件回转型机床(如车床)刀具的加工曲线。

由式(4)可得各曲线方程如下:

$$\text{静瞬心线 } C \text{ 的方程: } \begin{cases} X_c = (1-K)R_K \cos K\omega t \\ Y_c = (1-K)R_K \sin K\omega t \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{动瞬心线 } C_0 \text{ 的方程: } \begin{cases} u_{c_0} = -R_K \cos(K-1)\omega t \\ v_{c_0} = -R_K \sin(K-1)\omega t \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{静轮转曲线 } L \text{ 的方程: } \begin{cases} X_L = u_{p_0} \cos \omega t - v_{p_0} \sin \omega t + R_K \cos K\omega t \\ Y_L = u_{p_0} \sin \omega t + v_{p_0} \cos \omega t + R_K \sin K\omega t \end{cases} \quad (7)$$

式中 u_{p_0} 、 v_{p_0} 为回转平面上点 P_0 在 UOV 上的坐标。

$$\text{动轮转曲线 } L_0 \text{ 的方程: } \begin{cases} u_{L_0} = X_p \cos \omega t + Y_p \sin \omega t - R_K \cos(K-1)\omega t \\ v_{L_0} = -X_p \sin \omega t + Y_p \cos \omega t - R_K \sin(K-1)\omega t \end{cases} \quad (8)$$

式中 X_p 、 Y_p 为 XO_1Y 上点 P 的坐标。

应用尤拉公式各曲线方程可写成以下形式:

$$\text{静瞬心线方程: } C(t) = X_c + jY_c = (1-K)R_K e^{jK\omega t} \quad (9)$$

$$\text{动瞬心线方程: } C_0(t) = u_{c_0} + jv_{c_0} = -KR_K e^{j(K-1)\omega t} \quad (10)$$

$$\text{静轮转曲线方程: } L(t) = (u_{p_0} + jv_{p_0})e^{j\omega t} + R_K e^{jK\omega t} \quad (11)$$

$$\text{动轮转曲线方程: } L_0(t) = (X_p + jY_p)e^{-j\omega t} - R_K e^{j(K-1)\omega t} \quad (12)$$

利用以上各方程可以对转轴平面回转运动进行计算机仿真, 从而得到各曲线的图谱。这为分析研究回转精度提供了新的途径。

2 特性曲线的几何形状

根据各曲线方程和仿真结果, 现对各曲线的几何形状作简单讨论.

2.1 $K=1$

由式(9)、(10)知, 曲线 $C(t)$ 、 $C_0(t)$ 皆为一点. 由式(11)、(12)知, 曲线 $L(t)$ 、 $L_0(t)$ 皆为圆. 这说明此时没有运动误差, 球心位置信号 $F_1(t) = R_1 e^{j\omega t}$ 是由标准球安装偏心 R_1 引起的.

由式(11)知, 在动坐标系 UOV 上两点坐标, 如果满足 $u_1^2 + v_1^2 = u_2^2 + v_2^2$, 则两点在静坐标系 XO_1Y 上描绘的静轮转曲线—圆的半径是不同的.

由式(12)知, 在静坐标 XO_1Y 上两点坐标, 如果满足 $X_1^2 + Y_1^2 = X_2^2 + Y_2^2$, 则两点在动坐标系 UOV 上描绘的动轮转曲线—圆是相同的.

2.2 $K \neq 1$

由方程(9)、(10)知, 曲线 $C(t)$ 、 $C_0(t)$ 皆为圆, 它们的圆心分别为原点 O_1 和 O , 半径分别为 $R_c = |1-K|$ 、 $R_{c_0} = |K|R_K$. 方程(9)和(10)分别表示了在 t 时刻两瞬心线在切点处的矢径.

方程(11)清楚地表明, 转轴平面回转运动可以分解为以角速度 ω 绕球心 O 的转动和随球心 O 的平动. 方程(11)可写为:

$$L(t) = [(u_{p_0} + jv_{p_0}) + R_K e^{j(K-1)\omega t}] \cdot e^{j\omega t}$$

显见, 若 K 为整数, 当 $K > 0$ 时(即 ω_0 与 ω 同向), 则静轮转曲线 $L(t)$ 的几何形状具有 $(K-1)$ 个棱; 当 $K < 0$ 时(即 ω_0 与 ω 反向), 则 $L(t)$ 具有 $(1-K)$ 个棱.

由方程(11)知, 在动坐标系 UOV 上两点的坐标, 若满足 $u_1^2 + v_1^2 = u_2^2 + v_2^2$, 则两点在静坐标系 XO_1Y 上描绘的静轮转曲线的几何形状尺寸完全相同.

把方程(12)写为: $L_0(t) = [(X_p + jY_p) - R_K e^{jK\omega t}] \cdot e^{-j\omega t}$

显见, 若 K 为整数, 不管 ω_0 转向如何, 动轮转曲线 $L_0(t)$ 的几何形状具有 $|K|$ 个棱.

由方程(12)知, 在 XO_1Y 上两点坐标, 若满足 $X_1^2 + Y_1^2 = X_2^2 + Y_2^2$, 则两点在 UOV 上描绘的动轮转曲线的几何形状尺寸完全相同.

3 K 与 $(1-K)$ 次分量产生的轮转曲线

分析计算机仿真得到的图谱可以发现这样的规律. 如果 XO_1Y 上点 P 的坐标与 UOV 上点 P_0 的坐标满足 $X_p^2 + Y_p^2 = u_{p_0}^2 + v_{p_0}^2$, 并且 $F(t)$ 中 K 次分量 $F_K(t)$ 的模 R_K 与 $(1-K)$ 次分量 $F_{1-K}(t)$ 的模 R_{1-K} 相等, 则 $F_K(t)$ 产生的动轮转曲线的几何形状尺寸与 $F_{1-K}(t)$ 产生的静轮转曲线完全相同; 反之, $F_K(t)$ 产生的静轮转曲线的几何形状尺寸与 $F_{1-K}(t)$ 产生的动轮转曲线也完全相同. 如图 3 所示. 以下对此进行证明.

首先采用附加转动的方法进行证明。图2表示了 $F(t)$ 中 K 次分量 $F_K(t)$ 为式(3)时两个坐标系的相互位置。现在令两坐标系以共同的附加角速度 $-K\omega$ 绕原点 O_1 转动,则 XO_1Y 以 $-K\omega$ 绕点 O_1 转动, UOV 以 $(1-K)\omega$ 绕 O 点转动,原点 O (球心)静止。如图4所示。然后,再令两坐标系以共同的附加角速度 $(K-1)\omega$ 绕 O 点转动,则 UOV 静止不动,而 XO_1Y 以 $-K\omega+(K-1)\omega=-\omega$ 绕 O_1 转动,点 O_1 以 $(K-1)\omega$ 绕 O 点旋转。如图5所示。显然这时 XO_1Y 的平面转动与其以 ω 绕 O_1 点转动且 O_1 点以 $(1-K)\omega$ 绕 O 点旋转是等同的。分析图2和图5,可以看出,在附加转动以前, XO_1Y 上 P 点在 UOV 上描绘了一条动轮转曲线,而在附加转动之后, P 点描绘的却是一条静轮转曲线。显然两条曲线的几何形状尺寸完全相同。在附加转动之前, UOV 上 P_0 点在 XO_1Y 上描绘了一条静轮转曲线,而在附加转动之后, P_0 点描绘的却是一条动轮转曲线。显然两条曲线的几何形状尺寸也完全相同。

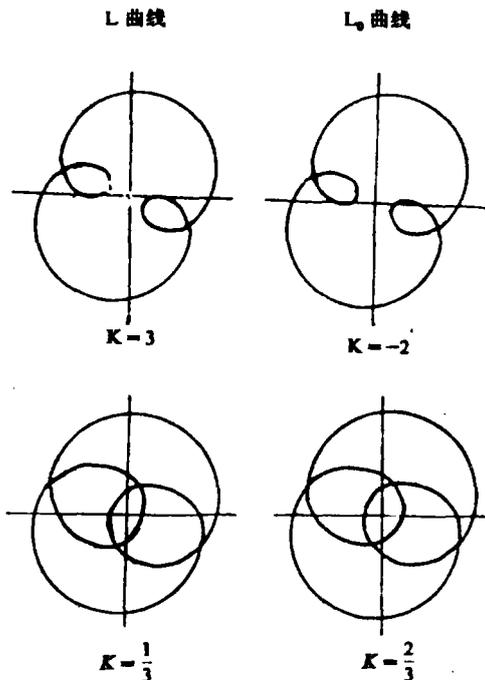


图3

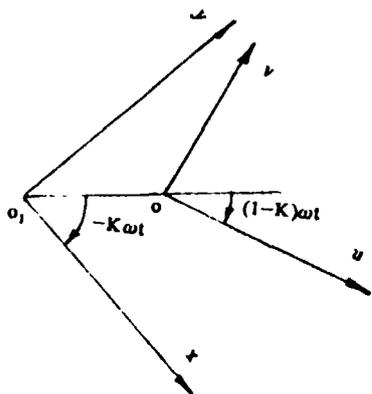


图4

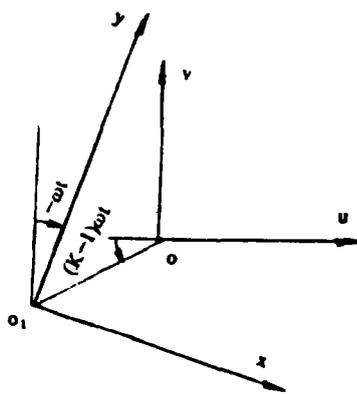


图5

现在应用数学方法进一步证明之。

$F(t)$ 中 K 次分量 $F_K(t) = R_K e^{jK\omega t}$ 产生的各曲线的方程为式(5)~(12)。

$F(t)$ 中 $(1-K)$ 次分量 $F_{1-K}^{(0)} = R_{1-K} e^{j(1-K)\omega t}$ 产生的各曲线的方程为:

$$C'(t) = KR_{1-K} e^{j(1-K)\omega t} \quad (13)$$

$$C'_0(t) = (K-1)R_{1-K} e^{-jK\omega t} \quad (14)$$

$$L'(t) = (u_{p_0} + jv_{p_0})e^{j\omega t} + R_{1-K} e^{j(1-K)\omega t} \quad (15)$$

$$L'_0(t) = (X_p + jY_p)e^{-j\omega t} - R_{1-K} e^{-jK\omega t} \quad (16)$$

由方程式(9)、(10)、(13)、(14)可以看出, 如果 $R_{1-K} = R_K$, 则圆 $C(t)$ 与圆 $C'_0(t)$ 的半径相等, 而圆 $C_0(t)$ 与圆 $C'(t)$ 的半径相等。由方程式(11)和(16)可知, 如果 $u_{p_0}^2 + v_{p_0}^2 = X_p^2 + Y_p^2$, $R_{1-K} = R_K$, 则 $L(t)$ 与 $L'_0(t)$ 的几何尺寸形状完全相同。同样, 比较方程式(12)和(15)可知, 如果 $X_p^2 + Y_p^2 = u_{p_0}^2 + v_{p_0}^2$, $R_{1-K} = R_K$, 则 $L_0(t)$ 与 $L'(t)$ 的几何尺寸形状也完全相同。

根据以上证明的规律可以想见, 只要得到动轮转曲线, 便可推知静轮转曲线, 反之亦然。例如, $K = -1$ 时, 静轮转曲线为一个椭圆, 可推知 $K = 2$ 时, 动轮转曲线也为一个椭圆; 而 $K = -1$ 时, 动轮转曲线为一个心形线, 可以推知 $K = 2$ 时, 静轮转曲线也为一条心形线。

4 结 语

本文首先推导出由标准球心径向误差运动 $F(t)$ 中 K 次分量 $F_K(t) = R_K c^{jK\omega t}$ 而产生的表征转轴平面回转运动特性的四种曲线方程, 并且简单地讨论了它们的几何形状。然后, 证明了当 $u_{p_0}^2 + v_{p_0}^2 = X_p^2 + Y_p^2$, 且 $R_{1-K} = R_K$ 时, $F(t)$ 中 K 次分量产生的动、静轮转曲线的几何尺寸形状分别与 $(1-K)$ 次分量产生的静、动轮转曲线完全相同。这将使回转精度仿真分析研究工作得到简化和深入。

参 考 文 献

- [1] 蔡鹤皋. 回转运动误差的精确测试理论与方法. 机械工程学报. 24(2), 1988.6
- [2] 张华容. 机床主轴回转精度的数学描述和分析. 机械工程学报. 18(4), 1982.12
- [3] 芮晓健. 主轴轴心轨迹的转动传感器测量法. 计量技术. 1989年第一期

Simulation Analysis of Plane

Rotary Error Motion

Huang Rengui

(Department of Mechanical Engineering)

Abstract: In this paper equation of four sorts of the curve are derived which result from K dimension component of radial error motion of master sphere center and indicate plane rotary motion characteristic of rotating axle, and their geometry are simply discussed. Then it is proved that the geometry and size of moving, stationary rotary curve resulting from K dimension component are respectively the same as of stationary moving rotary curve resulting from $(1-K)$ dimension component. This provides a new way for analysis and research of rotary precision.

Keywords: Spindle, Rotary error, Simulation analysis