

层次分析法在多目标决策中的应用初探

吴泽宁 蒋水心

(水环系)

提 要: 本文将社会生产过程中的多目标决策问题, 分成目标可以全部定量表示和目标只有部分可以定量表示两类; 重点研究了用群组层次分析法建立定量目标和非定量目标间的关系, 为解决广泛存在的第二类问题提供了一条可行的途径; 根据多目标决策问题的特性, 对常规的群组层次分析法进行了改进; 最后, 以经济区水资源优化分配为例, 验证了本文方法的合理有效性。

关键词: 多目标, 层次分析, 系统工程, 水利资源

1 问题的提出及解决途径

在现实的社会生产过程中, 存在着许许多多的多目标决策问题。一般来讲, P 个目标的多目标决策问题可表示为:

$$\begin{aligned} \text{opt}_{x \in R} F(X) &= \text{opt}_{x \in R} [f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)]^T \\ R &= \{X | g_i(x) \leq 0\} \end{aligned} \quad (1)$$

(1)式中 $f_i(x)$ 表示第 $i(i=1, 2, \dots, P)$ 个目标。根据 P 个目标的性质, 可将多目标问题分为两类: 一是 $f_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, P$)全部可定量表示; 二是 P 个目标仅有 $m(m < P)$ 个目标可以定量表示, 其它 $P-m$ 个目标不易定量表示, 且解决问题时又必须考虑。如经济区水资源优化分配问题, 涉及到政治、社会、经济、技术和生态环境等诸方面, 属多目标决策问题, 研究这个复杂的问题时, 不能仅仅追求经济目标, 而要追求在考虑水资源分配结果对政治、社会、生态环境等方面的影响后经济区的总效果——社会经济效果, 但因政治、社会、生态环境等方面的效果尚乏有效的定量方法, 显然它属第二类情况。社会生产过程中第二类情况的问题很多。那么, 研究这类问题的解决方法很有意义。

对上述的第二类问题不使用常规的多目标决策分析方法求解。众所周知, 政治、社会、经济、技术及生态环境各方面是密切相关的, 即 m 个定量目标和 $P-m$ 个定性目标是相关的。设想一种方法能建立起在总目标下 m 个定量目标和 $P-m$ 个定性目标间的关系(反映 m 个定量目标对其它目标的影响), 则可用修正后的 m 个定量目标来反映 P 个目标——社会经济效果。这就是解决问题的思路。

①收到日期: 1989.01.24

很显然,影响定量目标和非定量目标间关系的因素众多,且它们之间的相互影响关系错综复杂,此时直接给出这种关系是很困难的。层次分析法^[1]是处理包括众多定性因素的复杂问题的有效方法,它将复杂的问题结构化、层次化,充分利用人的判断,其结果表现为最低层元素相对于最高层的相对重要性权值。对我们的问题,若最高层为总目标——社会经济效果最大,最低层为 m 个具体的定量目标,中间为各种影响因素,则层次分析法可得出考虑定量目标对定性目标的影响后,定量目标反映社会经济效果相对大小的程度。这使我们的问题最后得到解决。

若用层次分析法确定 m 个定量目标相对于总目标权值为 $W = (W_1, W_2, \dots, W_m)^T$, 则(1)式可变为:

$$\text{opt} \sum_{i=1}^m W_i f_i(X) \quad (2)$$

(2)式权重法的形式非常相似,但其意义不同于权重法。权重法是通过确定 P 个目标的权重,使向量优化问题变成标量优化问题,以便利用成熟的单目标优化方法;层次分析法确定 m 个定量目标相对总目标的权重,是使 m 个定量目标能够在一定程度上反映总目标——社会经济效果,同时兼有将多目标转为单目标的作用,即这种方法旨在使 $\text{opt} \sum_{i=1}^m W_i f_i(X)$ 能近似代替

$$\text{opt}_{x \in R} [f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X); f_{m+1}(X), f_{m+2}(X), \dots, f_p(X)]^T$$

然后用单目标的优化方法解决第二类多目标决策问题。

多目标问题的选好解(偏好解)是通过求不劣解集,再加上决策者的偏好得到的。由于上述方法可以把决策者的偏好考虑于问题的求解过程中。因而,可直接得到选好解,同时也避免了求解不劣解集。

2 层次分析法建立定量目标和定性目标间关系的方法步骤

AHP(层次分析法)是一种多准则的决策方法,它既有坚实的数学基础,又有简单的表现形式,允许决策者直接参与决策过程,这就有可能在决策分析过程中充分考虑决策者的偏好,从而使决策分析结果实施的可能性大大提高。其解决问题的一般步骤^[1]:①明确问题的目标和各个影响因素,根据因素间的相互关系,建立相应的递阶层次结构模型;②将递阶层次结构中同一层次元素两两比较得到判断矩阵;③选择适当的方法计算各影响因素的相对权重,并检验一致性;④计算各层元素的组合权重并检验总体一致性。

由于我们要解决的问题是多目标决策中很关键的问题,单靠个人建立的模型和个人的判断是难以满足要求的,所以,要用群组层次分析法。下文将结合 AHP 方法步骤详述群组 AHP 确定定量目标和定性目标间关系的方法步骤和对群组 AHP 方法的一些改进。

2.1 专家咨询法建立解决问题的递阶层次结构

决策分析者在对问题进行全面分析以后,先建立一个初步的递阶层次结构;之后,连同建立模型的说明一起将初步模型送交包括决策者在内的各位专家,请他们咨询;收集整理各位专家的咨询意见,在此基础上修改初步模型,建立一个较合理的模型;将这个模型

反馈给各位专家, 并邀他们参加讨论会, 经各位专家充分讨论后, 最后确定一个基本的递阶层次结构模型。

为使结果更合理, 在基本模型的基础上, 决策分析者可派生出一系列模型, 分别计算各模型的结果, 通过对中间结果分析, 选出更符合实际的结果 (详见 3)。

2.2 “群体讨论”法构造判断矩阵

常规的群组 AHP 方法构造的判断矩阵为:

$$A_K^{(m)} = \begin{bmatrix} a_{K11}^m & a_{K12}^m & \cdots & a_{K1n}^m \\ a_{K21}^m & a_{K22}^m & \cdots & a_{K2n}^m \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{Kn1}^m & a_{Kn2}^m & \cdots & a_{Knn}^m \end{bmatrix} \quad (m = 1, 2, \cdots, M) \quad (3)$$

(3)中:

$A_K^{(m)}$ —— 第 m 个专家给出第 K 准则下元素间的判断矩阵;

a_{Kij}^m —— 第 m 个专家给出第 K 准则 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 元素和 $j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 元素比较判断的结果;

M —— 参加比较判断的人数;

n —— 与 K 准则有关的元素个数。

由(3)知, K 准则相应的判断矩阵为 M 个, 用这 M 个矩阵计算 K 准则下 n 个元素的相对重要性权重有两种方法: 一是先计算 $A_K^{(m)} (m = 1, 2, \cdots, M)$ 相应的权值 $W_K^{(m)} = (W_{K1}^{(m)},$

$W_{K2}^{(m)}, \cdots, W_{Knn}^{(m)})^T$, 再用:

$$W_{Ki} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M W_{Ki}^{(m)}; \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (4)$$

算得: $W_K = (W_{K1}, W_{K2}, \cdots, W_{Knn})^T$ 即 n 个元素相应的权值。另一方法是先求出一个综合的判断矩阵 $A_K = (a_{Kij})_{n \times n}$, 其中:

$$a_{Kij} = \frac{1}{m} \sum_{m=1}^M a_{Kij}^{(m)}; \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \quad (5)$$

再由 A_K 计算 K 准则下 n 个元素的权值 $W_K = (W_{K1}, W_{K2}, \cdots, W_{Knn})^T$ 。

上述方法求权重有如下不足: 第一, 对一个复杂的涉及面很广的问题, 因知识的局限性, 个人难以给出元素间相对重要程度的正确判断, 甚至有些判断值无法给定, 这导致个人给出判断矩阵的精度不能满足要求; 第二, 同一判断, 不同人给出的权重相差悬殊, 给这些值的处理带来很大的困难; 第三, 计算工作量大。为克服上述不足, 我们基于系统的基本思想和互补原理提出了“群体讨论”法。其基本思想: 由于个人的知识具有局限性、思维方式不同、偏好有别, 所以个人对复杂问题的认识很难达到完善和透彻; 而众多人的知识、专长和偏好有机地结合起来, 就可以显示出群体的整体功能——达到对事物更接近精确、完善的认识。其具体步骤如下: 第一, 将已确定的递阶层次结构模型送交群体讨论的参加者 (包括决策者), 要求他们各自给出判断 $A_K = (a_{Kij})_{n \times n}$; 第二, 过一段时间, 将

各位参加者召集来集体讨论。若对某个判断 a_{kij} ，大家的意见一致，则取 a_{kij} ；若大家的意见不一致，请各位参加者呈述自己给出判断的理由，展开充分地讨论，通过互相启发和补充，直至取得一致的判断 a_{kij} 。这样逐个给出判断，得K准则下n个元素的判断矩阵 $A_K = (a_{Kij})_{n \times n}$ ，依据可直接得到n个元素的相对排序权值 $W_K = (W_{K1}, W_{K2}, \dots, W_{Kn})^T$ 。由此可见“群体讨论”法在一定程度上克服了常规方法的不足。

2.3 权值计算

我们编制了完成单一准则排序权值和一致性检验及总排序权值和一致性检验的计算程序，程序框图如图1。

图1中：

W^k ——第k次迭代的特征向量；

n——判断矩阵的阶数；

A——判断矩阵；

ϵ ——给定精度标准；

λ_{\max} ——A的最大特征值；

C.I——一致性指标；

R.I——随机一致性指标；

C.R——随机一致性比率；

mm——判断矩阵总个数；

a^k, a^{k-1} ——k层及k-1层元素相对于总目标的组合排序；

B^k ——第k层元素以第k-1层元素为准则的排序权向量；

$C.I_k, R.I_k, C.R_k$ ——分别表示第k层以上的整个判断的一致性指标、随机一致性指标、和随机一致性比率。

2.4 采用权值的选取

用程序分别算出各模型相应的结果，通过对中间结果进行分析，选用符合实际的权重值（详见3）。

3 实例分析

某经济区属缺水地区，如何优化分配区内的水资源是急待解决的问题。因水资源涉及到社会生产和人民生活等各方面，故选用经济区的社会经济效果（包括政治、社会、经济、技术和生态环境等方面）

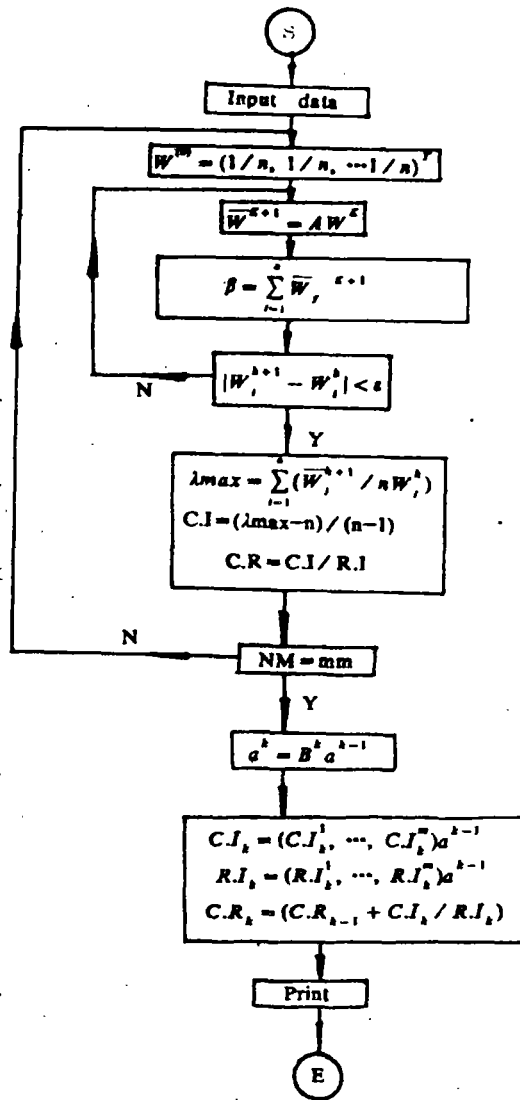


图1 程序框图

最大作为优化分配的总目标。用于经济区水资源分配的多目标模型⁽²⁾可简单地表示为:

$$\max_{x \in R} F(X) = \max_{x \in R} [F_1(x), F_2(x), \dots, F_5(x)]^T \quad (6)$$

R —— 为约束条件所组成的可行域;

$F_i(x)$ —— ($i = 1, 2, \dots, 5$) 分别表示政治、经济、技术和生态环境目标。

(6)中政治、社会、和生态环境方面尚无有效的量化方法,其属于上文提到的第二类问题,所以可用上述方法解决。

根据该区内工业、农业还不发达的实际情况,希望农业产量和工业产值愈大愈好,同时也希望供水费用最小,且这些方面都可以定量表示,为此,我们选用农业产量最大,工业产值最大和供水费用最小作为三个定量目标。用第二部分中的方法建立这三个目标和其它方面目标间的关系,使得目标函数能反映社会经济效果。模型(6)可变为:

$$\max_{x \in R} F(X) = \sum_{i=1}^3 W_i f_i(X) \quad (7)$$

其中: $f_i(X)$ ($i = 1, 2, 3$) —— 分别表示农业产量、工业产值、供水费用的倒数;

W_i ($i = 1, 2, 3$) —— 考虑第 i 定量目标对其它目标的影响后,反映总目标大小程度。

用第二部分中群组 AHP 方法确定 W_i ($i = 1, 2, 3$)。

第一,根据水资源优化分配问题的特性和区内的具体条件,用专家咨询法建立的基本递阶层次结构模型如图 2 所示,称为模型 I。

为使结果更合理,在模型 I 的基础上又派生出两个模型如图 3、图 4 所示,分别称为模型 II 和模型 III。

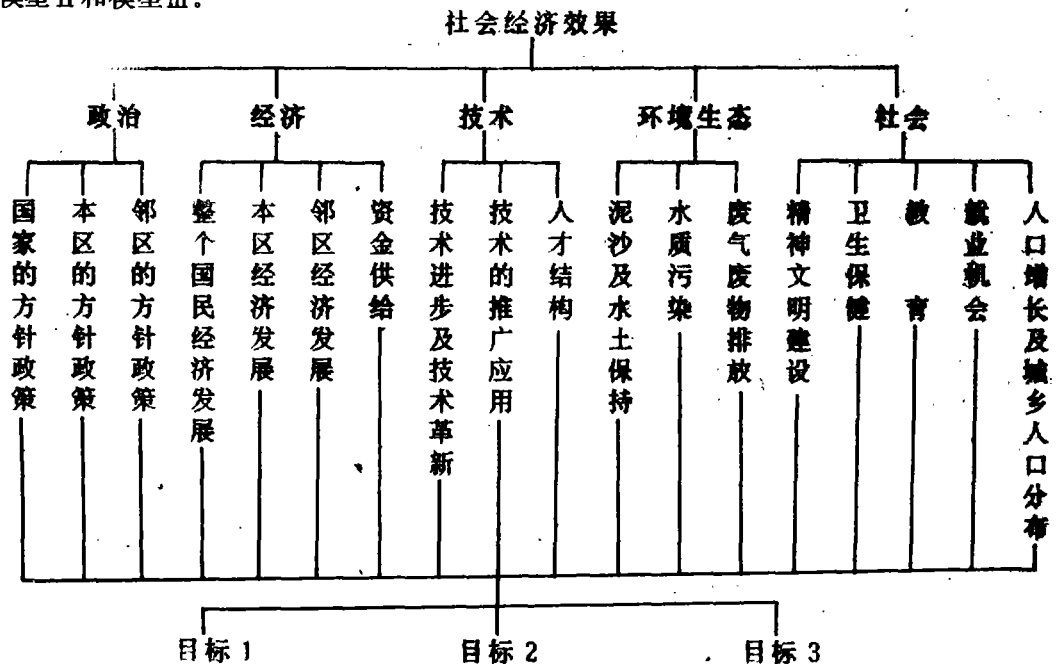


图2 递阶层次结构图(一)

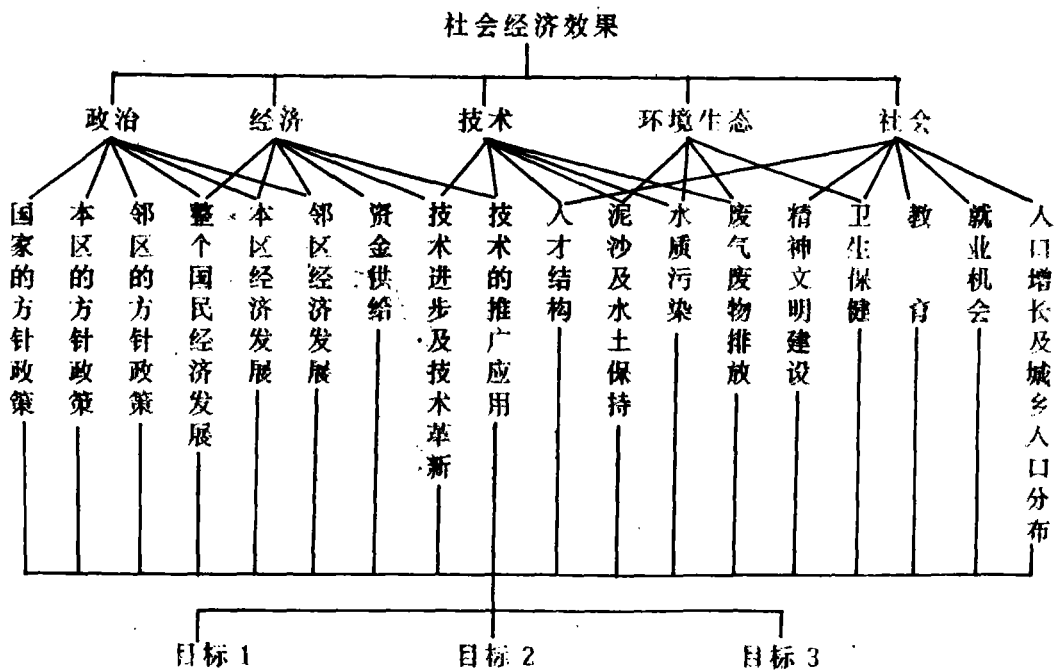


图3 递阶层次结构图(二)

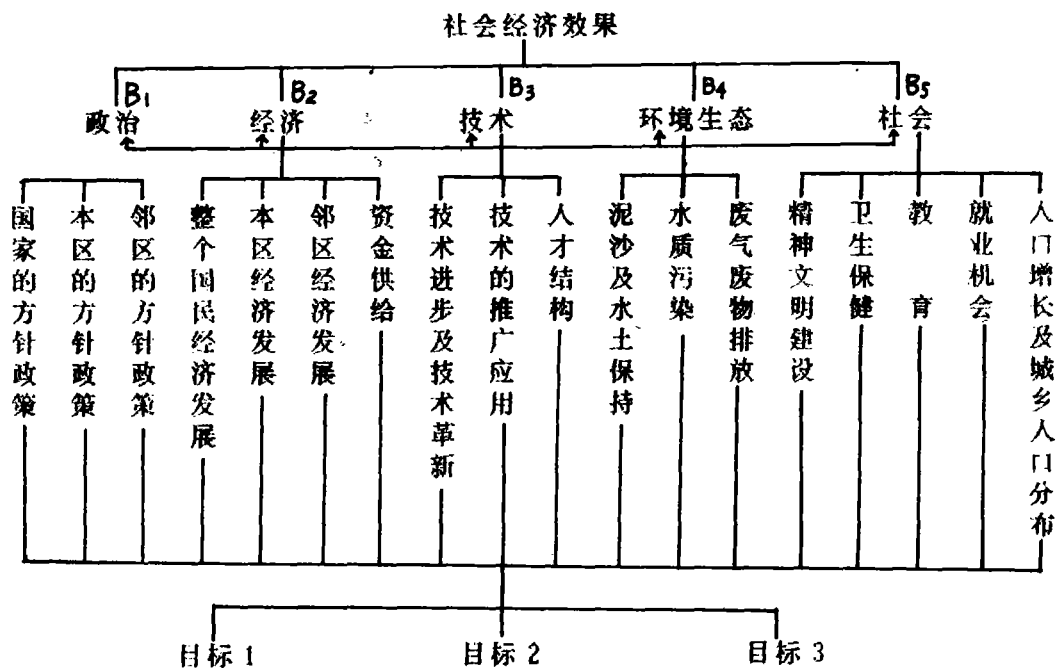


图4 递阶层次结构图(三)

图2、3、4中目标1、2、3分别表示(7)中 f_1 、 f_2 、 f_3 。

递阶层结构中最低层的三个目标实际上属于经济目标, 但又不能完全反映经济目标。这三个具体的定量目标和第三层次的各影响因素有直接的关系, 这些因素直接或间接地对第二层次的诸目标产生影响。层次分析方法恰恰是建立递阶层次结构中下层因素对上层次因素影响关系的一种多准则决策方法, 正是利用这个特点达到了用最低层具体目标反映总目标的目的。

第二, 对上述三个模型用“群体讨论”法构造判断矩阵。本文仅列出第二层 5 个因素在总目标下的判断矩阵如下:

0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
B_1	1	1/5	1/3	2	2
B_2	5	1	2	7	7
B_2	3	1/2	1	5	5
B_4	1/2	1/7	1/5	1	1
B_5	1/2	1/7	1/5	1	1

第三, 由相应的判断矩阵用程序求得各模型相应的定量目标的权重如表 1 所示。

表 1 各模型相应的目标权重

目 标		f_1	f_2	f_3
模 型	权 重			
I		0.44561	0.41477	0.13961
II		0.38454	0.44569	0.16978
III		0.43986	0.43249	0.12765

第四, 采用权重值的选取。

以上求得三组权重值, 哪一组更符合实际呢? 现对中间权值进行分析。考察 B 层元素对总目标的排序权值, 见表 2。

表 2 B 层元素对总目标的排序权值

元 素		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
模 型	权 重					
I、II		0.1073506	0.484571	0.2886288	0.06000	0.06000
III		0.3267000	0.227380	0.219540	0.069740	0.015664

比较表 2 中两行数值, 不难发现其差别很大, 这意味着考虑与不考虑第二层元素间的内部依存关系, 结果大不相同。众知, 政治、经济、技术、生态环境及社会这五个方面是密切相关的, 模型 I、II 假定这五个方面的内部依存关系可以忽略, 而模型 III 的结果又恰恰表明这种关系是不能忽略的。另外, 模型 III 的计算结果表明, 要实现社会经济效果最大正确的方针政策是很重要的, 经济和技术几乎具有同等的重要性, 社会也是很重要的方面, 环境方面也必须考虑, 这和实际情况相符。据此, 我们认为模型 III 计算的权重是较合理的, 即农业产量、工业产值和供水费用三目标相对经济区社会经济效果的重要性权重值分别为:

0.43986, 0.43249, 0.12765

这些值表明考虑农业产量、工业产值和供水费用对政治、经济和生态环境等方面的影响后,各目标反映社会经济效果相对大小的程度。

4 结 语

- 4.1 本文将 AHP 方法用于多目标决策分析中,并结合多目标决策问题的特点对群组 AHP 方法做了改进,通过递阶层次结构建立定量目标和其它不易量化目标间的关系,使得决策分析中有可能以社会经济效果作为优化目标,使多目标决策方法解决问题更有效。
- 4.2 因 AHP 方法简单的表现形式,允许决策者直接参与决策分析过程,一方面可以直接得到决策者偏好解;另一方面,提高了优化方案实施的可能性。
- 4.3 本文对 AHP 方法应用于多目标决策分析中的有关问题进行了初步探讨,有些问题尚等完善和进一步的研究。

参 考 文 献

- [1] Saaty, T.L. The Analytic Hierarchy Process. McGraw-Hill Company. 1980
- [1] 吴泽宁. 经济区水资源优化分配. 郑州工学院硕士论文. 1988

The Preliminary Study of the Application of AHP in Multiobjective Decision Making

Wu Zening Jiang Shuixin
(Hydr. Eng. Dept.)

Abstract: In this paper, the multiobjective decision making problem which widely exists in the social producing process is divided into two types according to the character of the objectives. The process of establishing the relationship among the quantitative objectives and the qualitatives in group AHP is emphatically studied, in order to solve the second type multi objective decision making problem. And some improvement on ordinary group AHP is made. Finally, taking the optimal allocation of water resources in the economic region as example, the verity of the method above mentioned is checked, the result shows that the method is reasonable and fessible.

Keywords: multiple objectives, water resources, AHP, system engineering