用摄动有限元方法对空间刚架结构动特性的灵敏度分析

王 伟 郝 伟

（数力系）

提要 本文提出一种对不定参数结构进行动力分析的摄动有限元方法。该方法用二阶摄动法和有限元方法结合起来，将结构的不定参数视为是在其某一确定值邻域的摄动。利用二阶摄动的有限元方法通过一次性的计算就得到结构的动特性随其不定参数变化的二次函数关系式，这样即可非常方便地得到结构动特性随其参数变化的灵敏度。这无凝对结构的优化设计将具有重要的意义。

关键词：摄动法，有限元法，灵敏度，动特性

在通常的结构分析中，采用的都是确定参数模型，即将结构的全部参数看成是确定的值，这反映在结构分析模型上，便是其力学模型（（如有限元模型）中的全部参数都是确定的，而其数学模型中的全部特性矩阵（如动力分析便是其质量，刚度和阻尼阵）中的元素都是确定的值。但在实际问题中，用确定参数模型对结构进行分析有时并不是很恰当的。因为在实际问题中有许多结构的参数都具有不确定性。这种情况有：材料特性的不确定性；结构的边界条件难以准确测定而具有的随机性；由于产品的加工和装配等误差造成的结构某些参数的不确定性；还有一类参数是在结构设计和优化过程中假设的设计变量，由于它们是设计变量，因此在结构分析时将其看成不定参数显然要比将其视为确定参数更为合理得多。

结构动特性对其参数变化的灵敏度分析在结构的设计、修改和优化过程中非常重要。在结构动力分析中，灵敏度分析更是当前的一个重要课题。在对某结构的动特性进行灵敏度分析时，如用确定参数模型，则难以直接得到该结构动特性随其参数变化的一般规律。要获得这种规律，就必须进行许多次的计算，这无疑要花费较多CPU时间，对于大型结构，这个问题就更为突出。但如果将这些经常需要变化的参数视为不定参数，即用“不定参数模型”对结构动特性进行分析计算，那就可以通过一次性的计算来得到结构的动特性随这些不定参数变化的一般关系式（近似的），这样，结构的动特性随不同参数变化的灵敏度也可通过一次性的计算来直接获得。

对结构中的这些不定因素，都可将其表示成相应的不定参数，并且称这种结构为“不定参数结构”，一般地，当结构的不定参数变化不大时，总可以将其视为是在其某一“初值”邻域的摄动。把结构的不定参数用符号$\overset{\frown}{P_i}$表示，当$\overset{\frown}{P_i}$变化不大时，可将$\overset{\frown}{P_i}$表示成$\overset{\frown}{P_i}=P_{i0}(1+\varepsilon_i)$。其中$P_{i0}$是$\overset{\frown}{P_i}$的初值（或变化的平均值），$\varepsilon_i$是一无量纲的小量，即$0\leqslant|\varepsilon_i|<1$。我们将二阶摄动方法和有限元法结合起来，导出了一种可以对不定参数结构进行动力分析

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的摄动有限元方法。该方法可以方便地通过一次性的分析计算得到结构动特性随其不定参数变化的近似的二次关系式，从而可直接得到结构动特性随不同参数变化的灵敏度。

1　摄动有限元方法简介

1.1　单元摄动特性矩阵

在对不定参数结构分析时，每当有限单元的参数发生小变化时，单元的$[\rho]$,$[\mu]$,$[D]$以及单元的形函数矩阵$[N]$，积分域等也会发生相应的变化。我们把这些不定参数按其是否对单元“形状”产生影响而将其分为两类。第一类不定参数我们称其为“单元形不变参数”，即这类参数的变化不会引起单元“形状”的改变，因此单元形函数矩阵$[N]$及积分域也不变。这类参数有：板单元的厚度，梁单元的截面积等等。第二类不定参数我们称其为“单元形变参数”，即这类参数的变化将引起单元‘形状’的改变，因此这时单元形函数矩阵$[N]$及积分域也会变。这类参数主要指单元的结点坐标变量。

当第一类不定参数变化时，由于单元的形函数矩阵及积分域不变，因此单元摄动矩阵易于得到。假设$\overset{\frown}{P_i}$是第一类不定参数，即$\overset{\frown}{P_i}=P_{io}(1+\varepsilon_i)$ $(i=1\sim n)$，$0\leqslant|\varepsilon_i|<1$，则单元密度函数矩阵$[\rho]$，阻尼系数矩阵$[\mu]$及$[D]$矩阵也会发生相应变化。即有：

$$[\overset{\frown}{\rho}]=[\rho_o]+\sum_{i=i}^{n}[\rho_i]\varepsilon_i \tag{1a}$$

$$[\overset{\frown}{\mu}]=[\mu_o]+\sum_{i=1}^{n}[\mu_i]\varepsilon_i \tag{1b}$$

$$[\overset{\frown}{D}]=[D_o]+\sum_{i=1}^{n}[D_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}[D_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j \tag{1c}$$

于是便得到第一类不定参数变化时单元的动摄特性矩阵的具体表达式：

$$\begin{aligned}[\overset{\frown}{m^e}]&=\iiint_{V^e}[N]^T[\overset{\frown}{\rho}][N]dV=\iiint_{V^e}[N]^T([\rho_o]+\sum_{i=1}^{n}[\rho_i]\varepsilon_i)[N]dV\\&=\iiint_{V^e}[N]^T[\rho_o][N]dV+\sum_{i=1}^{n}(\iiint_{V^e}[N]^T[\rho_i][N]dV)\varepsilon_i=[m^e_o]+\sum_{i=1}^{n}[m^e_i]\varepsilon_i\end{aligned} \tag{2a}$$

$$\begin{aligned}[\overset{\frown}{C^e}]&=\iiint_{V^e}[N]^T[\overset{\frown}{\mu}][N]dV=\iiint_{V^e}[N]^T([\mu_o]+\sum_{i=1}^{n}[\mu_i]\varepsilon_i)[N]dV\\&=\iiint_{V^e}[N]^T[\mu_o][N]dV+\sum_{i=1}^{n}\left(\iiint_{V^e}[N]^T[\mu_i][N]dV\right)\varepsilon_i=[C^e_o]+\sum_{i=1}^{n}[C^e_i]\varepsilon_i\end{aligned} \tag{2b}$$

$$[\overset{\frown}{K^e}]=\iiint_{V^e}[B]^T[\overset{\frown}{D}][B]dV=\iiint_{V^e}[B]^T([D_o]+\sum_{i=1}^{n}[D_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$[D_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j)[B]dV=\iiint_{V^e}[B]^T[D_o][B]dV+\sum_{i=1}^{n}\left(\iiint_{V^e}[B]^T[D_i][B]dV\right)\varepsilon_i$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left(\iiint_{V^e}[B]^T[D_{ij}][B]dV\right)\varepsilon_i\varepsilon_j=[K^e_o]+\sum_{i=1}^{n}[K^e_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}$$

$$[K^e_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j \tag{2c}$$

当第二类不定参数发生变化时，由于单元形函数矩阵〔N〕，〔B〕矩阵及积分域都会发生变化，因此求单元摄动特性矩阵要比前一种情况复杂得多。

1.2　总体摄动特性矩阵

由于结构中某些参数发生变化时会引起单元特性矩阵发生相应的变化，因此由有限元组集而得到的总体特性矩阵，即总体质量阵，总体刚度阵等也会发生相应的变化，即有：

$$[\overset{\frown}{m}]=[m_o]+\sum_{i=1}^{n}[m_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}[m_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j \tag{3a}$$

$$[\overset{\frown}{K}]=[K_o]+\sum_{i=1}^{n}[K_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}[K_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j \tag{3b}$$

其中：$[m_o]=\sum_{e=1}^{R}[m^e_o]$，$[m_i]=\sum_{e=1}^{R}[m^e_i]$，$[m_{ij}]=\sum_{e=1}^{R}[m^e_{ij}]$

$[K_o]=\sum_{e=1}^{R}[K^e_o]$，$[K_i]=\sum_{e=1}^{R}[K^e_i]$，$[K_{ij}]=\sum_{e=1}^{R}[K^e_{ij}]$

这里，$[m_i]$与$[m_{ij}]$分别称为不定参数结构的一阶总体质量摄动矩阵与二阶总体质量摄动矩阵。$[K_i]$与$[K_{ij}]$分别称为不定参数结构的一阶总体刚度摄动矩阵与二阶总体刚度摄动矩阵。由单元摄动矩阵组集成总体摄动矩阵的方法和确定参数结构时的情况相同，可用“直接刚度法”。

2　不定参数结构的动特性分析

由于结构的有限单元模型的总体质量阵和总体刚度阵都是小参数ε_i的函数，因此，由此而决定的结构的固有频率和主模态也必然是ε_i的函数，按多元函数的Tayler级数展开式可得：

$$\overset{\frown}{\lambda}=\lambda_o+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\lambda_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j+O(\varepsilon^3) \tag{4a}$$

$$\{\overset{\frown}{U}\}=\{U_o\}+\sum_{i=1}^{n}\{U_i\}\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\{U_{ij}\}\varepsilon_i\varepsilon_j+O(\varepsilon^3) \tag{4b}$$

结构的固有频率和主模态应满足广义特征问题方程：$([K]-\lambda[m])\{U\}=\{O\}$　　(5)

而对不定参数结构，显然应满足：

$$([\overset{\frown}{K}]-\overset{\frown}{\lambda}[\overset{\frown}{m}])\{\overset{\frown}{U}\}=\{O\} \tag{6}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

将（3）、（4）中的各式代入（6）式便得到：

$$\left([K_o]+\sum_{i=1}^{n}[K_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}[K_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j-\left(\lambda_o+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\lambda_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j\right)\left([m_o]+\sum_{i=1}^{n}[m_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}[m_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j\right)\right)\left(\{U_o\}+\sum_{i=1}^{n}\{U_i\}\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\{U_{ij}\}\varepsilon_i\varepsilon_j\right)=\{O\}$$

将上式展开，考虑到$\varepsilon_i\varepsilon_j$的任意性，比较等式两边 ε 的同次幂系数，且只保留到ε的二次项便得到关于不定参数结构的动特性的摄动递推方程：

$$\varepsilon_o:\quad ([K_o]-\lambda_o[m_o])\{U_o\}=\{O\} \tag{7a}$$

$$\varepsilon_i:\quad ([K_i]-\lambda_o[m_i]-\lambda_i[m_o])\{U_o\}+([K_o]-\lambda_o[m_o])\{U_i\}=\{O\} \tag{7b}$$

$$\varepsilon_i\varepsilon_j:\quad ([K_{ij}]-\lambda_i[m_j]-\lambda_j[m_i](1-\delta_{ij})-\lambda_{ij}[m_o]-\lambda_o[m_{ij}])\{U_o\}+([K_i]-\lambda_i[m_o]-\lambda_o[m_i])\{U_j\}+([K_j]-\lambda_j[m_o]-\lambda_o[m_j])\{U_i\}(1-\delta_{ij})+([K_o]-\lambda_o[m_o])\{U_{ij}\}=\{O\} \tag{7c}$$

其中，（7a）式即为在确定参数p_{io}下的常规特征问题方程。因此可按常规解法来得到λ_o^s和$\{U_o^s\}$，即第s（s＝1～n）阶对初始参数p_{io}的特征值和特征矢量，而且以后假设$\{U_o^s\}$是正交归一化的主模态。

2.1 λ_i和λ_{ij}的求法

由于系统摄动特征值$\overset{\frown}{\lambda}$的表达式为：

$$\overset{\frown}{\lambda}=\lambda_o+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\lambda_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$$

因此，求解$\overset{\frown}{\lambda}$的问题便包括确定：$\lambda_o$——未摄动解，$\lambda_i$——一阶摄动量及$\lambda_{ij}$——二阶摄动量。其中，$\lambda_o$可由常规方法确定。

为求λ_i将（7b）式改写成为：

$$([K_i]-\lambda_o^s[m_i]-\lambda_i^s[m_o])\{U_o^s\}+([K_o]-\lambda_o^s[m_o])\{U_i^s\}=\{O\} \tag{8}$$

其中：上角标s表示特征对的阶次。

用$\{U_o^s\}^T$左乘（8）式得：

$$\{U_o^s\}^T([K_i]-\lambda_o^s[m_i]-\lambda_i[m_o])\{U_o^s\}+\{U_o^s\}^T([K_o]-\lambda_o^s[m_o])\{U_i^s\}=\{O\} \tag{9}$$

由于 $([K_o-\lambda_o[m_o])\{U_o^s\}=\{O\}$

在$[K_o]$，$[m_o]$均为对称矩阵的情况下（事实上，结构有限单元模型的特性矩阵均为对称矩阵），则有：

$$\{U_o^s\}^T([K_o]-\lambda_o[m_o])=\{O\} \tag{10}$$

由此，由（9）式和（10）式便得到：

$$\{U_o^s\}^T([K_i]-\lambda_i^s[m_o]-\lambda_o^s[m_i])\{U_o^s\}=\{O\}$$

由于$\{U_o^s\}$是经正交归一化的主模态矩阵，因此有：

$$\{U_o^s\}^T[m_o]\{U_o^s\}=1$$

于是可得摄动特征值$\overset{\frown}{\lambda}{}^s$对参数$\varepsilon_i$的一阶摄动量$\lambda^s_i$的具体表达式为

$$\lambda_i^s=\{U_o^s\}^T([k_i)-\lambda_o^s[m_i])\{U_o^s\}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

为求摄动特征值$\widetilde{\lambda}^s$对参数ε_i的二阶摄动量λ^s_{ij}，将（7c）式改写成为：

$$([K_{ij}]-\lambda_i^s[m_j]-\lambda_j^s[m_i](1-\delta_{ij})-\lambda^s_{ij}[m_o]-\lambda_o^s[m_{ij}])\{U_o^s\}+([K_i]-\lambda_i^s[m_o]-\lambda_o^s[m_i])\{U_j^s\}+([K_j-\lambda_j^s[m_o]-\lambda_o^s[m_j])\{U_i^s\}(1-\delta_{ij})+([K_o]-\lambda_o^s[m_o])\{U^s_{ij}\}=\{O\} \quad (12)$$

用$\{U_o^s\}^T$左乘（16）式，考虑到$\{U_o^s\}^T([K_o]-\lambda_o^s[m_o])=\{O\}$及$\{U_o^s\}^T[m_o]\{U_o^s\}=1$，便得到：

$$\lambda^s_{ij}=\{U_o^s\}^T([K_{ij}]-\lambda_i^s[m_j]-\lambda_j^s[m_i](1-\delta_{ij})-\lambda_o^s[m_{ij}])\{U_o^s\}+\{U_o^s\}^T([K_i]-\lambda_o^s[m_i]-\lambda_i^s[m_o])\{U_j^s\}+\{U_o^s\}^T([K_j]-\lambda_j^s[m_o]-\lambda_o^s[m_j])\{U_i^s(1-\delta_{ij}) \quad (13)$$

由（11）、（13）两式的推导过程可知，整个推导过程只用了特征问题方程与正交性条件$\{U_o^s\}^T[m_o]\{U_o^s\}=1$，因此，（11）和（13）两式对$\lambda_o^s$是单根和重根的情况都适用。

2.2　$\{U_i^s\}$和$\{U_{ij}^s\}$的求法

在这里只介绍Collins.J.D方法。为此将(8)式简化为：$[A^s]\{U_i^s\}=[B_i^s]\{U_o^s\}$ （14）

其中$[A^s]=[K_o]-\lambda_o^s[m_o]$，$[B_i^s]=-([K_i]-\lambda_i^s[m_o]-\lambda_o^s[m_i])$

当λ^s是单根时，由（4b）式可知，$\{\widetilde{U}^s\}$中有一个分量可任意定，为此令$U_i^s=0$，即摄动特征矢量$\{\widetilde{U}^s\}$的一阶变化率矢量$\{U_i^s\}$的第一个分量为0，于是，（14）式可写成：

$$[A^s_{n\times(n-1)}]\{U^s_{i,(n-1)}\}=[B_i^s]\{U_o^s\} \quad (15)$$

其中，$\{U^s_{i,(n-1)}\}$是由（14）式中的$[A^s]$去掉第一列的长方阵，而$\{U^s_{i,(n-1)}\}$是由$\{U_i^s]$去掉第一个零元素的列阵。用$[A^s_{n\times(n-1)}]^T$左乘（15）式并整理得到：

$$\{U^s_{i,(n-1)}\}=[T^s]^{-1}[V_i^s]\{U_o^s\} \quad (16)$$

式中，$[T^s]=[A^s_{n\times(n-1)}]^T[A^s_{n\times(n-1)}]$，$[V_i^s]=[A^s_{n\times(n-1)}]^T[B_i^s]$

于是，摄动特征矢量的一阶变化率为：

$$\{U_i^s\}=\begin{Bmatrix} O \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{U^s_{i,(n-1)}\} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

同样道理，可由（12）式求出摄动特征矢量的二阶变化率$\{U^s_{ij}\}$。而且也不难求出当$\widetilde{\lambda}^s$是1重根时摄动特征矢量的一阶、二阶变化率。注意，此时由于$\widetilde{\lambda}^s$是1重根，因此$\{\widetilde{U}^s\}$中各有1个分量可任意定，如令$U_{i,k}=0$，$U_{ij,k}=0$（$k=0\sim1-1$）。

3　结构动特性的灵敏度分析

在实际工程中，为把一个结构设计的更合理，需要对它进行修改，应修改结构的哪些参数以及如何修改这些参数才能达到预期的效果便是结构动特性对其参数的灵敏度要回答的问题。一般地，将结构第s阶特征值$\widetilde{\lambda}^s$对不定参数$\widetilde{P}_i$的一阶，二阶灵敏度定义为：

$${}_*\lambda_i^s=\partial\widetilde{\lambda}^s/\partial\widetilde{P}_i,\quad {}_*\lambda^s_{ij}=\partial^2\widetilde{\lambda}^s/\partial\widetilde{P}_i\cdot\partial\widetilde{P}_j$$

因为：　$\widetilde{P}_i=P_{io}(1+\varepsilon_i)$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

所以：$_*\lambda_i^s=\partial\overset{\frown}{\lambda^s}/\partial\varepsilon_i\cdot\frac{1}{P_{io}}$，$_*\lambda^s_{ij}=\partial^2\overset{\frown}{\lambda^s}/\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j\cdot\frac{1}{P_{io}P_{jo}}$ （18）

同理，结构第s阶主模态$\{\overset{\frown}{U^s}\}$对不定参数$\overset{\frown}{P_i}$的一阶、二阶灵敏度定义为：

$$\{_*U_i^s\}=\partial\{\overset{\frown}{U^s}\}/\partial\varepsilon_i\cdot\frac{1}{P_{io}},\quad\{_*U^s_{ij}\}=\partial^2\{\overset{\frown}{U^s}\}/\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j\cdot\frac{1}{P_{io}\cdot P_{jo}}\tag{19}$$

将（4a）和（4b）式加上表示特征对阶次的上角标s并分别代入（18）和（19）两式 即得到结构第s阶特征对随其不定参数$\overset{\frown}{P_i}$变化的一阶、二阶灵敏度为：

$$_*\lambda_i^s=(\lambda_i^s+2\lambda^s_{ii}\varepsilon_i+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\lambda^s_{ij}\varepsilon_j)/P_{io}\tag{20a}$$

$$_*\lambda^s_{ij}=\lambda^s_{ij}/(P_{io}\cdot P_{jo})\tag{20b}$$

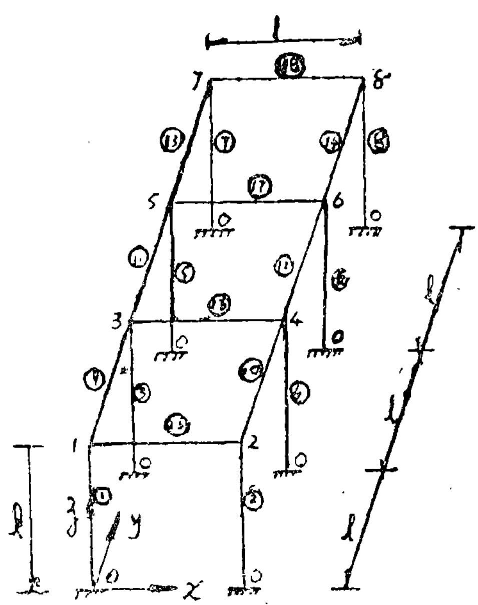
$$\{_*U_i^s\}=(\{U_i^s\}+2\{U^s_{ii}\}\varepsilon_i+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\{U^s_{ij}\}\varepsilon_j)/P_{io}\tag{20c}$$

$$\{_*U^s_{ij}\}=\{U^s_{ij}\}/(P_{io}\cdot P_{jo})\tag{20d}$$

由（20）各式不但给出了结构动特性对不定参数$\overset{\frown}{P_i}$在P_{io}处的灵敏度，还给出了$\overset{\frown}{P_i}$有小 变 化时的灵敏度以及几个参数同时变化时对结构动特性的耦合影响。但是对于二阶灵敏度则未考虑耦合影响。

4 算 例

图为一空间刚架，各杆均为圆截面 。已知$l=5m$，$d=0.05m$， $E=2.1\times10^{11}N/m^2$，$G=8.7\times10^{10}N/m^2$，$\rho=7.8\times10^3kg/m^2$，其单元编号，结点编号，以及整体座标系如图示。



当有限单元矩阵具有显式表达式时，单元摄动矩阵可直接从其显式表达式中获得。此例便属于这种情况。

本例中，假设各杆d有一小变化，即$\overset{\frown}{d_i}=d_o(1+\varepsilon_i)$（$i=1\sim18$），通过计算将用该法求得的结构固有频率和用有限元重分析求得的结构固有频率列入表1中。

由下表可知，两种方法求出的结果几乎相等，说确该方法在理论上完全正确，而且计算精度也很高。

现设系统的第s阶特征值$\overset{\frown}{\lambda^s}=\omega_s{}^2$为：

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表1　（此时取$\varepsilon=0.2$）

方法 / 固有频率阶数	摄动有限元方法	有限元重分析方法
1	7.14529	7.14528
2	7.43585	7.43585
3	8.31343	8.31342
4	13.01590	13.01589

$$\overset{\frown}{\lambda}{}^{s}=\lambda_o^{s}+\sum_{i=1}^{18}\lambda_i^{s}\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{18}\sum_{j=1}^{i}\lambda^{s}_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$$

则系统第s阶特征值$\overset{\frown}{\lambda}{}^{s}$对其不定参数$\overset{\frown}{P}_i$的灵敏度为：$_{*}\lambda_i^{s}=\lambda_i+2\lambda^{s}_{ii}\varepsilon_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{18}\lambda^{s}_{ij}\varepsilon_j$

由于该结构的对称性，可知杆1，2，7，8；杆3，4，5，6；杆9，10，13，14；杆11，12；杆15，18；杆16，17，截面直径的变化对结构之固有频率的影响分别是相同的。应用摄动有限元方法计算出该刚架结构的前五阶特征值随参数ε_i变化的形如（4a）式的二次近似函数关系式后，再利用（20a）式求得了结构前五阶特征值对其不定参数$\overset{\frown}{P}_i$在其初值P_{io}处的灵敏度如表2所示。由于该刚架各杆截面直径的初值P_{io}相同，因此其灵敏度可直接表示成为$\partial\overset{\frown}{\lambda}/\partial\varepsilon$。

表2　（$\varepsilon=0$）

特征值阶次	$\partial\overset{\frown}{\lambda}/\partial\varepsilon$ / λ_0	$\frac{\partial\overset{\frown}{\lambda}}{\partial\varepsilon_1}$	$\frac{\partial\overset{\frown}{\lambda}}{\partial\varepsilon_3}$	$\frac{\partial\overset{\frown}{\lambda}}{\partial\varepsilon_9}$	$\frac{\partial\overset{\frown}{\lambda}}{\partial\varepsilon_{11}}$	$\frac{\partial\overset{\frown}{\lambda}}{\partial\varepsilon_{16}}$	$\frac{\partial\overset{\frown}{\lambda}}{\partial\varepsilon_{18}}$
1	35.456	9.2180	14.0110	−5.2431	−6.6414	2.9052	3.2182
2	38.397	10.800	16.237	0.0446	−3.4912	−6.1607	−6.1156
3	47.996	23.939	7.3950	−7.5828	0.1831	0.0692	0.2405
4	117.65	19.791	8.3561	28.218	−9.1719	−1.8795	15.965
5	124.85	12.104	15.547	−13.301	23.168	6.9258	66.058

由表2可以看出，杆1（或杆2，7，8）截面直径的变化对结构的第三阶特征值的影响最大；杆3（或杆4，5，6）截面直径的变化对结构的第二阶特征值的影响最大；杆9（或杆10，13，14）截面直径的变化对结构的第四阶特征值的影响最大；杆11（或杆12）截面直径的变化对结构的第五阶特征值的影响最大；杆15（或杆18）截面直径的变化对结构的第五阶特征值的影响最大；杆16（或杆17）截面直径的变化对结构的第五特征值的影响最大。并且杆1～8截面直径的增加都使得结构的各阶特征值增大；杆9，10，13，14截面直径的增加使结

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

构的第二、四阶特征值增大，而使其余各阶特征值减小；杆11，12截面直径的增加使结构的第三、五阶特征值增大，而使其余各阶特征值减小；杆15，18截面直径的增加使结构的第一、四、五阶特征值增大，而使其余两阶特征值减小；杆16，17截面直径的增加使结构的第一、三、四、五阶特征值增大，而使第二阶特征值减小。

5 结论

通过以上的分析计算可以知道，应用摄动有限元方法对具有不定参数结构的动特性进行分析是十分有效的，而且也非常方便。由于摄动有限元方法可以通过一次性的计算即可得到结构之动特性随其不定参数变化的二次近似函数关系式，所以可以很方便地求出结构的动特性随其参数变化的灵敏度，从而为结构的修改和设计提供可靠的根据，特别是对大型复杂结构，这种方法的优越性就更加突出。

本文在撰写的过程中，得到殷学纲教授的指导和支持，在此仅致以诚挚的谢意。

参 考 文 献

[1] 殷学纲：具有不定参数结构方力分析的摄方有限之简介 四川省振方动术交流会论文集 1988年11月 成都
[2] 殷学纲等：摄方传递矩阵方法及其在结构动特性灵敏度分析中的应用 重庆大学学报1卷11期1988
[3] 林树枝：结构动力问题的灵敏度分析及动力优化设计和CAD 大连理工大学博士学位论文 1988年4月
[4] 陈塑衰：结构振动分析的矩阵摄动理论 吉林学业大学力学系 1987年8月
[5] 刘正兴：结构分析程序设计基础 上海交通大学出版社 1988年
[6] A.H奈弗：摄动方法 上海科技出版社 1984年

The Application of the Perturbat ion Finite Element Method in the Dynamic Characteristies Sensitivity Analysis of the Space Frame Structure

Wang Wei Hao Wei
(Math. and Mech. Dept. ZhengZhou Inst. of Technocl)

Abstract: A perturbation finite element method, which can be used to carry on dynamic analysis of a structure with undefinite parameters, is presented in this paper. The method is that the second order perturbation method is combined with the finite element method, and the undefinite parameters of a structure is regarded as a perturbation in the neighbotrhood of a definite value. Using the basic idea of the second order perturbation and the finite element method, the method which can be used to solve the natural frequency and main mode which is the second order function of the undefinite parameters of the structurf is obtained. Thus, the sensitivity of the structural dynamic characteristies with respect to its undefinite parameters can be obtained conveniently.

Keywords: the perturbation method, the finite element method, sensetivity, dynamic characteristies.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net