第10卷 第3期 郑州工学院学报 VOL.10 NO.3
1989年 9 月 J.ZhengZhou Inst. of Technol. sept. 1989

多维非线性sobolev型发展方程(组)的初边值问题

蒋慧琴 魏光祖

(郑州工学院) (郑州大学)

提　要： 本文主要研究了如下的初边值问题

$$\begin{cases} L[u]=u_{tt}-\sum\limits_{i,j=1}^{u} a_{ij}(u,\ D_{x_i}u)u_{x_ix_j}-\Delta u_t+b(u,\ D_{x_i}u)=0 \\ u(x,\ 0)=\phi(x),\ u_t(x,\ 0)=\Psi(x) \quad x\in\Omega \quad x\in\Omega \quad t\geqslant 0 \\ u|_{\partial\Omega\times(0,\ \infty)}=0\ 。\end{cases}$$

其中$\Omega\subset R^n$是一有界开集，其边界$\partial\Omega$充分光滑。进一步证明了这个问题整体解的存在唯一及$t\to+\infty$时解的渐近性质。

关键词： Galerkin方法，sobolev不等式，局部存在定理，Gronwall不等式，衰减估计。

1 前　言

在描述平面有界层的强迫振动、动物神经系统中生物电流信号的传递等等物理、力学、生物问题时，常常出现主部含$u_{tt}-u_{xxt}$的拟双典型方程。例如1962年，Nagumo等[1]提出了神经传播方程

$$u_{tt}=u_{xxt}-c_1(1-u+c_2u^2)u_t-u \tag{1.1}$$

C_1，C_2为非负常数。1963年，Arima[2]，Yamaguti[3]等把方程(1.1)推广为

$$u_{tt}=u_{xxt}-f(u)u_t-g(u) \tag{1.2}$$

1975年，Pao.C.V[4]研究了下述更为广泛的多维非线性拟双曲方程的初边值问题

$$\begin{aligned} u_{tt}=&\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^3 u}{\partial x_i\partial x_j\partial t}+\sum_{i=1}^{n} b_i(t,\ x)\frac{\partial_2 u}{\partial x_i\partial t} \\ &-f(t,\ x,\ u)u_t-g(t,\ x,\ u)\ (t\in[0,T],\ x\in\Omega\subset R^n), \\ &\partial(t,x)\frac{\partial}{\partial v}u_t(t,x)+u_t(t,x)=h(t,x) \qquad (x\in\partial\Omega), \\ &u(0,x)=\phi(x), \qquad u_t(0,x)=\Psi(x), \end{aligned} \tag{1.3}$$

当$\partial(t,x)\equiv0$或$h(t,x)\equiv0$的情形。1982年H.A.Ларбкuн等人在文[5]中用紧致法研究高维方程

收到日期：1988.11.11

$$\beta u_{tt}+u_t-\sum_{i=1}^{n}\partial^2 x_i t F_i(x,t,u_x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_i(x,t,u_x)=f(x,t) \quad (1.4)$$

广义解的存在唯一性。1985年G.ponce在文[6]中研究高维三阶双曲型方程

$$u_{tt}-\Delta u-\nu\Delta u_t=F(\Delta u,D\Delta u) \quad (1.5)$$

的初值问题，1986年文[7]研究一般形式高维方程$L(u)=u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(u,b_{xt}u)u_{x_ix_j}$

$$-\Delta u_t+b(u,b_{xt}u)=0 \quad (1.6)$$

的小初值问题整体解的存在唯一性。在本文中研究方程（1.6）及其相应的方程组的初边值问题，而初边值条件为 $u(x,0)=\phi(x)$；$u_t(x,0)=\Psi(x)\quad x\in\Omega$ （1.7）

$$u|_{\Sigma\infty}=0 \quad (1.8)$$

$\Omega\subset R^n$是一有界开集，其边界$\partial\Omega$充分光滑。对$\forall T>0$，记$Q_T=[0,T]\times\Omega$，$\Sigma_T=[0,T]\times\partial\Omega$。$H^k(\Omega)$表示通常的k阶Sobolev空间。$W^{s,p}(0,T;H^k(\Omega))$表示对每一$t\in[0,T]$，取值于$H^k(\Omega)$，对$t\in W^{s,p}(0,T)$的函数空间，$\forall f\in W^{s,p}(0,T;H^k(\Omega))$，规定：

$$||f||^p_{W^{s,p}(0,T;H^k(\Omega))}=\sum_{|\alpha|\leqslant S}\int_0^T|D^\alpha_t||f||_{H^k(\Omega)}|^p dt$$

为其模，则$W^{s,p}(0,T;H^k(\Omega))$为-Banach 空间。类似可以定义 Banach 空间$C^k([0,T];H^k(\Omega))$记

$$D^{m-1}=H^{m-1}(\Omega)\cap H_0^1;$$

$$X_{1,T}=\prod_{k=1}^{m}C^k([0,T];D^{m+1-k})\cap C^{m+1}([0,T];L^2(\Omega))\cap C([0,T];D^m)$$

$$X_{2,T}=\prod_{k=0}^{m-1}C^k([0,T];D^{m-k})\cap C^m([0,T];L^2(\Omega));$$

$$X_{3,T}=X_{4,T}\cap X_{5,T};$$

$$X_{4,T}=\prod_{k=0}^{m-1}W^{k,\infty}(0,T;H^{m-k}(\Omega))\cap W^{m,\infty}(0,T;L^2(\Omega));$$

$$X_{5,T}=\prod_{k=0}^{m-2}C^k([0,T];D^{m-k-1})\cap C^{m-1}([0,T];L^2(\Omega))。$$

2 线性问题

考虑如下的线性问题：

$$G_1\begin{cases}L_0[u]=u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j}-\Delta u_t=f(t,x) & (t,x)\in Q_T \quad (2.1)\\ u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) & x\in\Omega \quad (2.2)\\ u|\Sigma_T=0\end{cases}$$

方程（2.1）的系数及右端项满足条件（H_1）

i） $a_{ij}(t,x)=a_{ji}(t,x)$ $i,j=1,\cdots,n$；存在正常数ν（$\leqslant1$）

使对$\forall\xi\in R^n$，$\forall x\in\Omega$，$\forall t\in[0,T]$，有

$$\nu|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j\leqslant\nu^{-1}|\xi|^2$$

ii）对整数$m\geqslant2[\frac{n}{2}]+3$

$$a_{ij}(t,x)\in\prod_{k=0}^{m-1}W^{k,\infty}(0,T;\ H^{m-k-1}(\Omega)),\ i,j=1,\ \cdots,\ r$$

$$f(t,x)\in\prod_{k=0}^{m-1}W^{k,\infty}(0,T;\ H^{m-k-1}(\Omega)),$$

$$\left.\frac{\partial^k f(t,x)}{\partial t^{k}}\right|_{t=0}\in H_0^{2m-k-4}(\Omega),\ k=0,\ 1,\ \cdots 2m-4。$$

ii）存在常数$M_1>0$，使在Q_T内有：

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(t,x)-\delta_{ij}|\leqslant\frac{1}{4M_1},\qquad \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(t,x)|\leqslant\frac{1}{2M_1^2}$$

其中M_1由引理2.1决定。

尽始函数满足条件（H_2）

$$\phi\in H^{2(m-1)}(\Omega),\ \psi\in H^{2(m-1)}(\Omega);\ m\geqslant2[\frac{n}{2}]+3\qquad 条件（H_3）$$

$$\partial_t^j u|_{t=0}\in H^1_0(\Omega),\ 0\leqslant j\leqslant2(m-1),\ m\geqslant2[\frac{n}{2}]+3，称相容条件。$$

引理2.1　设$u(x)$为$\begin{cases}\Delta u=f(x), & x\in\Omega。\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$

的解，则对任意整数$l\geq0$，若$f(x)x\in H^l(\Omega)$，必有$u(x)\in H^{l+2}(\Omega)$，且有估计

$$||u||_{H^{l+2}(\Omega)}\leqslant M_1(||u||_{L^2(\Omega)}+||f||_{H^l(\Omega)})$$

常数$M_1>0$仅依赖于n，l及Ω。

引理2.2设（H_1）、（H_2）、（H_3）满足，则问题（G_1）存在解$u(x,t)\in X_{2,T}$。

证明：设$\{\omega_j\}$为$H^m(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$的一个基，则可唯一决定$g_{i,N}(t)$使

$$u_N(x,t)=\sum_{j=1}^{N}g_{i,N}(t)\omega_j(x)\qquad(2.3)$$

满足：

$$(u_N''(t),\ \omega_j)-(\sum_{r,s=1}^{n}a_{rs}(t,x)u_{Nx_rx_s},\ \omega_j)+(\Delta u_N'(t),\ \Delta\omega_j)=(f,\omega_j),\qquad(2.4)$$

$$u_N(0)=u_{0,N}=\sum_{j=1}^{N}\xi_{i,N}\omega_j,\qquad(2.5)$$

$$u'_N(0)=u_{1,N}=\sum_{j=1}^{N}\eta_{j,N}\omega_j, \tag{2.6}$$

且有 $g_{i,N}(0)=\xi_{i,N}\quad i=1,\cdots,N,$ (2.7)

$g'_{i,N}(0)=\eta_{i,N}\quad i=1,\cdots,N,$ (2.8)

令 $R^k_{ij}=a_{ij}(t,x)\partial^k_t u_{Nx_ix_j}-\partial^k_t(a_{ij}(t,x)u_{Nx_ix_j})$

$K^k_{ij}=(a_{ij}(t,x))_{x_j}\partial_t^k u_{Nx_i}\partial_t^k u_{Nt}$

$\wedge^k_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}(t,x))_t\partial^k_t u_{Nx_j}\partial^k_t u_{Nx_i}$

$\omega^k_{ij}=a_{ij}\partial^k_t u_{Nx_i}\partial^k_t u_{Nx_j}$

将(2.4)对t求k阶导数，并乘以$g_{hN}^{(k+1)}(t)$，对$h=1,\cdots,N$求和，又关于$k=0,1,\cdots m-1$作和得：

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(|\partial^k_t u_{Nt}|^2+\sum_{ij=1}^{n}\omega^k_{ij}\right)dx$$
$$+\int_\Omega\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i,j=1}^{n}R^k_{ij}\partial^k_t u_{Nt}dx+\int_\Omega\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i,j=1}^{n}(K^k_{ij}-\wedge^k_{ij})dx$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int_\Omega|\Delta\partial^k_t u_{Nt}|^2dx=\sum_{k=0}^{m-1}\int_\Omega\partial^k_t f\partial^k_t u_{Nt}dx$$

由此得：

$$||u_N(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{k=0}^{m-1}||\partial_t^{k+1}u_N(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{k=0}^{m-1}||\Delta\partial^k_t u_N(t)||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leqslant C(M)\Big(\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}\big(||D^\alpha_x\partial^\beta_t u_N(0)||^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t||D^\alpha_x\partial^\beta_t u_N(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt\big)$$
$$+\int_0^T\sum_{k=0}^{m-1}||\partial^k_t f||^2_{L^2(\Omega)}dt\Big) \tag{2.9}$$

令 $A(t)=C(M)\Big\{\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^\alpha_x\partial^\beta_t u_N(0)||^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-2}||D^\alpha_x\partial^\beta_t f||^2_{L^2(\Omega)}$

$$+\int_0^t\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-1}||D^\alpha_x\partial^\beta_{t_1}f||^2_{L^2(\Omega)}dt_1+\int_0^t\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^\alpha\partial_{t_1}u_N(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt_1\Big\}$$

则由归纳法利用引理2.1可证得：

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant l}||D^\alpha_x\partial^\beta_t u_N(t)||^2_{L^2(\Omega)}\leqslant A(t) \tag{2.10}$$

对一切整数$0\leqslant l\leqslant m$，$\forall t\in[0,T]$成立。

因 $\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-2}||D^\alpha_x\partial^\beta_t f||^2_{L^2(\Omega)}\int_0^t\sum_{|\alpha|2\beta\leqslant m-1}||D^\alpha_x\partial^\beta_t f||^2_{L^2(\Omega)}dt$

$$+\sum_{|\alpha|\beta\leqslant m-2}||D^\alpha_x\partial^\beta_t f(0)||^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.11}$$

在（2.10）中令$l=m$，并用gronwall不等式，对$\forall t\in[0,T)$

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}u_N(t)||^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C(M)e^{C(M)T}\Big(\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}u_N(0)||^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-2}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}f(0)||^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-1}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}f(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt\Big) \tag{2.12}$$

对$k=0,1,\cdots,m$逐个求得：

$$||\partial^k_t u_N(0)||^2_{H^{m-k}(\Omega)}\leqslant C(M)\Big(||u_N(0)||^2_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+||u_{Nt}(0)||^2_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant 2m-4}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}f(0)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)$$

令　$W_N(0)=||u_N(0)||^2_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+||u_{Nt}(0)||^2_{H^{2(m-1)}(\Omega)}$

则有（2.5）、（2.6）得：

$$\lim_{N\to\infty}w_N(0)=||\phi||^2_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+||\Psi||^2_{H^{2(m-1)}(\Omega)}$$

于是由（2.20）推出对$AN\geqslant 0$，$\forall t\in[0,T)$有

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}u_N(t)||^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C=Const \tag{2.13}$$

由（2.13）知存在$\{u_N(t)\}$的子列$\{u_\mu(t)\}$及$u(x,t)\in X_{5,T}$使当$\mu\to\infty$时有

$$u_\mu(t)\xrightarrow{强}u(x,t)\qquad 在X_{5,T}中$$

再由（2.13)存在$\{u_N(t)\}$的子列$\{u_\mu(t)\}$以及$V_0(t)\in D^m$，$V_1(t)\in D^{m-1}$，…，$V_m(t)\in L^2(\Omega)$使有

$$\left.\begin{array}{ll} u_\mu(t)\xrightarrow{弱}V_0 & 在D^m中\\ \partial_t u_\mu(t)\xrightarrow{弱}V^1 & 在D^{m-1}中\\ \cdots\quad\cdots & \cdots\\ \partial^m_t u_\mu(t)\xrightarrow{弱}V_m & 在L^2(\Omega)中\end{array}\right\} \tag{2.14}$$

于是有$V_0=u(t),\cdots,V_m=\partial^m_t u(t)$，在(2.4)中令$N=\mu\to\infty$知$u(x,t)\in X_{3,T}$是问题(G)的解。

引理2.3.若$u(x,t)\in X_{1,T}$且为问题（G_1）的解，则有估计?

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C(M)e^{C(M)T}\Big\{\sum_{|\alpha|+\beta\leq m}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}u(0)||^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{|\alpha|+\beta\leq m-2}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}f(0)||^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\sum_{|\alpha|+\beta\leq m-1}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}f(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt\Big\} \tag{2.15}$$

证明：类似于不等式（2.12）的证明

引理2.4.$u(x,t)\in X_{2,T}$是问题（G_1）之解，则有（2.15）成立。

证明：设J_δ为正规化算子，令

$$u_\delta(x,t)=J_\delta * u,\quad f_\delta=J_\delta * f \tag{2.16}$$

$$g_\delta=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(J_\delta * u_{x_ix_j})+J_\delta *(a_{ij}u_{x_ix_j}) \tag{2.17}$$

则有$u_{\delta tt}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{\delta x_ix_j}-\Delta u_{\delta t}=f_\delta+g_\delta \qquad \delta\leq t\leq T-\delta$ （2.18）

则 $u_\delta(x,t)\in X_{1,T}$，由引理2.3知对大于 δ的正数ε，在$\varepsilon\leq t\leq T-\varepsilon$上$u_\delta$满足（2.15）即：

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leq m}||D^\alpha_x\partial^\beta_t u_\delta(t)||^2_{L^2(\Omega)}C(M)e^{C(M)T}\{\sum_{|\alpha|+\beta\leq m}||D^\alpha_x\partial^\beta_t u_\delta(\omega)||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\sum_{|\alpha|+\beta\leq m-2}||D^\alpha_x\partial^\beta_t f_\delta(\varepsilon)||^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{|\alpha|+\beta\leq m-2}||D^\alpha_x\partial^\beta_t g_\delta(\varepsilon)||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\sum_{|\alpha|+\beta\leq m+1}||D^\alpha_x\partial^\beta_t f_\delta(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt+\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\sum_{|\alpha|+\beta\leq m-1}||D^\alpha_x\partial^\beta_t g_\delta(t)\cdot$$
$$||^2_{L^2(\Omega)}dt\} \qquad (2.19)$$

利用文[8]的Friedrich引理，不难得到

$$\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\sum_{|\alpha|+\beta\leq m-1}||D^\alpha_x\partial^\beta_t g_\delta(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt\to 0 \qquad 当\ \delta\to 0时$$

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leq m-2}||D^\alpha_x\partial^\beta_t g_\delta(\varepsilon)||^2_{L^2(\Omega)}\to 0 \qquad 当\delta\to 0时$$

由条件及$u\in X_{1,T}$，在（2.19）中固定ε先令$\delta\to 0$，再令$\varepsilon\to 0$而得估计（2.15）。

定理2.1.设（H_1）、（H_2）、（H_3）满足，则问题（G_1）存在唯一的解$u(x,t)\in X_{2T}$，且有能量估计

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leq m}||D^\alpha_x\partial^\beta_t u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\leq C(M)e^{C(M)T}\{||\phi||^2_{H^{2(m-1)}(\Omega)}$$
$$+||\psi||^2_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+\sum_{|\alpha|+\beta\leq 2m-4}||D^\alpha_x\partial^\beta_t f(0)||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\int_0^T\sum_{|\alpha|+\beta\leq m-2}||D^\alpha_x\partial^\beta_t f(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt\} \qquad (2.20)$$

其中$M=\sup\limits_{0\leq t\leq T}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{|\alpha|+\beta\leq m-1}||D^\alpha_x\partial^\beta_t a_{ij}(t)||_{L^2(\Omega)}$，$C(M)$是与M有关而与T无关的正常数。

证明：由引理2.2知，（G_1）存在解$u(x,t)\in X_{3,T}$。为证定理，只须证$u(x,t)\in X_{2,T}$。

由（H_1）成立可知，$a_{ij}(t,x)$（$i,j=1,\cdots,n$）和$f(t,x)$关于t从[0, T]可延拓到[$-\delta_0$, $T+\delta_0$]，取δ_0充分小使延拓后的函数仍记为a_{ij}（$i,j=1,\cdots,n$），$f(t,x)$满足（H_1）。

由引理2.2在（$-\delta_0$, $T+\delta_0$）上，问题（G_1）的解$u_\delta(x,t)\in X_{3,T}$。在（$-\delta_0$, $T+\delta_0$）的任一紧集上，当δ，δ'充分小时，成立

$$(u_\delta-u_{\delta'})_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)(u_\delta-u_{\delta'})_{x_ix_j}-\Delta(u_\delta-u_{\delta'})_t=f_\delta-f_{\delta'}-g_\delta-g_{\delta'}$$

其中$R_\delta=J_\delta * R$，g_δ由（2.17）规定。

对$\forall(x,t)\in Q_T$，用（2.15）并令δ，$\delta'\to 0$得

$$\sup_{0\leq t\leq T}\sum_{|\alpha|+\beta\leq m}||D^\alpha_x\partial^\beta_t(u_\delta-u_{\delta'})(t)||^2_{L^2(\Omega)}\to 0$$

因此，我们得到$u(x,t)\in X_{2,T}$，由引理2.4得（2.15）成立。

对$k=0,1,\cdots,m$逐个求得：

$$||\partial^{k}_{t}u(0)||_{H^{m-k}(\Omega)}\leq C(M)(||\phi||_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+||\Psi||_{H^{2(m-1)}(\Omega)}\sum_{|\alpha|+\beta\leq 2m-4}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}f(0)||^{2}_{L^{2}(\Omega)})\tag{2.21}$$

把（2.21）代入（2.15）整理得（2.20）成立。

定理2.1证毕。

3　初边值问题解的局部存在与唯一

由sobolev不等式，对$\forall f\in H^{[\frac{n}{2}+1]}(\Omega)$，则存在正常数$E_0(\leqslant\frac{1}{2})$和$r_0$，使当$||f||_{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega)\leqslant E_0$时，有：$||f||_{L^\infty(\Omega)}\leqslant r_0$。对于整数$m\geqslant 2[\frac{n}{2}]+3$以及常数$T>0$，

作空间

$$X_T=\{V|V\in X_{2,T}\}\tag{3.1}$$

并在其中装备范数

$$||V||^2_{X_T}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}V(t)||^2_{L^2(\Omega)}\tag{3.2}$$

易知X_T是一个Banach空间，我们再对正常数$E\leqslant E_0$和T，定义空间：

$$X_{T,E}=\{V|V\in X_T,\ 且\left.\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\right|_{t=0}\in H_0^{2m-k-4},\ ||V||_{X_T}\leqslant E\}\tag{3.3}$$

$$k=0,1,\cdots,2m-4$$

引理3.1.［9］设$\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_N)\in W^{S,p}(R^n)$，$S\geqslant 0$，$0\leqslant p\leqslant\infty$，且对正常数$r_0$有$||\omega||_{L^\infty(R^n)}\leqslant r_0$。$F(\omega)$充分光滑，记C为任意常数，则有，

i）若$F(0)=0$则$F(\omega)\in W^{S,p}(R^n)$且

$$||F(\omega)||_{W^{S,p}(R^n)}\leqslant C||\omega||_{W^{S,p}(R^n)}$$

ii）若$|F(\omega)|=0(|\omega|^\alpha)$（$\alpha\geqslant 1$）则

$$||F(\omega)||_{W^{S,p}(R^n)}\leqslant C||\omega||_{W^{S,p}(R^n)}||\omega||^{\alpha-1}_{L^\infty(R^n)}$$

iii）若$|F(\omega)|=0(|\omega|^{1+\alpha})$（$\alpha\geqslant 1$）则对$\overline{\omega}$，$\overline{\overline{\omega}}\in W^{S,q}(R^n)\cap L^\infty(R^n)\cap L^p(R^n)$

$$||F(\overline{\omega})-F(\overline{\overline{\omega}})||_{W^{S,r}(R^n)}\leqslant C\{||\omega^*||_{L^p(R^n)}(||\overline{\omega}||_{W^{S,q}(R^n)}+||\overline{\overline{\omega}}||_{W^{S,p}(R^n)})+||\omega^*||_{W^{S,p}(R^n)}(||\overline{\omega}||_{L^p(R^n)}+||\overline{\overline{\omega}}||_{L^p(R^n)})\}\times(||\overline{\omega}||_{L^\infty(R^n)}+||\overline{\overline{\omega}}||_{L^\infty(R^n)})^{\alpha-1}。$$

其中$\omega^*=\overline{\omega}-\overline{\overline{\omega}}$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$　$1\leqslant p,q\leqslant\infty$。

引理3.2.考察问题

$$(G_2)\begin{cases} u_{tt}-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(V,\ D_{xt}V)u_{x_ix_j}-\Delta u_t=-b(V,\ D_{xt}V) & (t,x)\in Q_T \\ u(0,\ x)=\phi(x),\ u_t(0,\ x)=\psi(x) & x\in\Omega \\ u|_{\Sigma_T}=0 \end{cases}$$

设方程（1.6）中的$a_{ij}(y)$，$b(y)$满足条件(H)：

i）$a_{ij}(y)$ （$i,\ j=1,\ \cdots,\ n$），$b(y)\in C^\infty(R^{n+2})$ ii)$a_{ij}(y)=a_{ji}(y)$，$i,\ j=1,\ \cdots\cdots n$，）且存在正常数r_0和$\nu(\leqslant 1)$，使对$\forall\xi\in R^n$和$\forall y\in R^{n+2}$，当$|y|\leqslant r_0$时，成立 $\nu|\xi|^2\leqslant\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(y)\xi_i\xi_j\leqslant\nu^{-1}|\xi|^2$ iii）$b(0)=0$，$|a_{ij}(y)|=0(|y|^2)$，

$|b(y)|=0(|y|^2)$。

在问题（G_2）中假定（H）、（H_2）、（H_3）成立。则存在正常数T和$\delta(<1)$，使对适当小的$E(\leqslant E_0)$，当$V\in X_{T,E}$且初值满足：$||\phi||_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+||\psi||_{H^{2(m-1)}(\Omega)}<\delta E$（3.4）时，问题（$G_2$）存在唯一解$u\in X_{T,E}$。（这里T和$\delta$与$E_0$有关而与E无关）

证明：对某个正常数T和适当小的$E(\leqslant E_0)$（T和E都待定)。由$V\in X_{T,E}$和假定（H）知：可选E适当小使假定（H_1）成立。由定理2.1得：问题（G_2）存在唯一解$u(x,t)\in X_T$，且在[0，T]上成立估计：

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^\alpha_x\partial^\beta_t u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C(\widetilde{m})e^{G(\widetilde{m})T}\{||\phi||^2_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+||\psi||^2_{H^{2(m-1)}(\Omega)}$$

$$+\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant 2m-4}^{M}||D^\alpha_x\partial^\beta_t b(V,DV)(0)||^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-1}||D^\alpha_x\partial^\beta_t b(V,DV)(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt$$

这里$\widetilde{M}=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\sum\limits_{i,j=1}^{n}\sum\limits_{|\alpha|+\beta\leqslant m-1}||D^\alpha_x\partial^\beta_t a_{ij}(V,DV)(t)||_{L^2(\Omega)}$

利用定理得到：

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^\alpha_x\partial^\beta_t u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C(E_0)e^{C(E_0)T}(\delta^2E^2+E^2+E^2T)$$

$$=C(E_0)e^{C(E_0)T}(\delta^2+T+1)E^2$$

因此只要取δ和T适当小，使$(\delta^2+T+1)e^{C(E_0)T}<8$，那么当E适当小，使$E\leqslant\min(E_0,\ \sqrt{\frac{1}{8C(E_0)}})$且使假定（$H_1$）成立时，就有：$||u||_{X_T}\leqslant E$。

再把（G_2）中的方程对t求k-2次导数，令$t=0$，再利用引理3.1可得：

$$\partial^k_t u|_{t=0}\in H_0^{2m-k-4}(\Omega),\ k=0,\ 1,\ \cdots 2m-4。$$

定理3.1.设在问题（1.6）、（1.7）、（1.8）中假定（H），（H_2）、（H_3）成立，则存在正整数T和$\delta(<1)$，使对适当小的正数$E(\leqslant E_0)$当初值满足（3.4）时，问题存在唯一的局部解$u(x,t)\in X_{T,E}$。

证明：选取δ，T和E，使引理3.2的要求成立。构造近似解序列$\{u^{(l)}\}_{l=0,1,\cdots}$如下：

取$u^{(0)}=0$，

对$l\geqslant 1$，$u^{(l)}$由下述线性问题

$$\begin{cases} u_{tt}^{(l)}-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u^{(l-1)},\ D_{xt}u^{(l-1)})u_{x_ix_j}^{(l)}-\Delta u_t^{(l)} \\ \quad =-b(u^{(l-1)},\ D_{xt}u^{(l-1)}) \qquad (x,\ t)\in Q_T \\ u^{(l)}(0,\ x)=\phi(x),\ u_t^{(l)}(0,\ x)=\psi(x);\ x\in\Omega \\ u^{(l)}|_{\Sigma_T}=0 \end{cases} \tag{3.5}$$

确定，显然$u^{(0)}\in X_{T,E}$。由引理3.2知：当初值满足（3.4）时，可得到$u^{(l)}\in X_{T,E}$（$l\geqslant 1$）。记　$V^{k,j}=u^{(k)}-u^{(j)}$；$a_{ij}{}^k=a_{ij}(u^{(k)},\ D_{xt}u^{(k)})$；$b^k=b(u^{(k)},\ D_{xt}u^{(k)})$；则由（3.5）容易得到：对$l\geqslant 2$有：

$$\begin{cases} V_{tt}^{l,l-1}-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}{}^{l-1}Vx_ix_j{}^{l,l-1}-\Delta_t{}^{l,l-1}=-[b^{l-1}-b^{l-2}] \\ +\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}{}^{l-1}-a_{ij}{}^{l-2})Vx_ix_j{}^{(l-1),0} \qquad (t,\ x)\in Q_T \\ V^{l,l-1}(0,\ x)=0,\ V^{l,l-1}(0,\ x)=0 \qquad x\in\Omega \\ V^{l,l-1}|\Sigma_T=0 \end{cases} \tag{3.6}$$

由定理2.1并注意到$u^{(l)}\in X_{T,E}$　（$l\geqslant 0$）有：

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-1}||D^{\alpha}{}_x\partial^{\beta}{}_tV^{l,l-1}(t)||^2{}_{L^2(\Omega)}\leqslant C(E_0)e^{C(E_0)T}(T+1)$$

$$\times\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-2}\{||D^{\alpha}{}_x\partial^{\beta}{}_t(b^{l-1}-b^{l-2})(t)||^2{}_{L^2(\Omega)}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}||D^{\alpha}{}_x\partial^{\beta}{}_t(a_{ij}{}^{l-1}-a_{ij}{}^{l-2})Vx_ix_j{}^{l-1,0}(t)||^2{}_{L^2(\Omega)}\}$$

$$\leqslant C_1e^{C_1T}(T+1)E^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-1}||D^{\alpha}{}_x\partial^{\beta}{}_tV^{l-1,\ l-2}(t)||^2{}_{L^2(\Omega)}$$

$0\leqslant t\leqslant T$因此，只要取T充分小，使$e^{C_1T}(T+1)<4$取$E\leqslant\sqrt{\frac{1}{8c_1}}$，且取E和T都满足引理3.2的要求，就得叠代公式：

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-1}||D^{\alpha}{}_x\partial^{\beta}{}_tV^{l,l-1}(t)||^2{}_{L^2(\Omega)}\leqslant\frac{1}{2}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m-1}||D^{\alpha}{}_x\partial^{\beta}{}_tV^{l-1,l-2}(t)||^2{}_{L^2(\Omega)}, \tag{3.7}$$

再由方程（3.6）得到：存在函数$u\in\prod\limits_{k=0}^{m}C^k([0,\ T];\ H^{m-1-k}{}_{(\Omega)})$，　（3.8）

使当$l\to+\infty$时有：

$$u^{(l)}\to u,\qquad 在\prod_{k=0}^{m}C^k([0,\ T];\ H^{m-1-k}{}_{(\Omega)})中, \tag{3.9}$$

又由$u^{(l)}\in X_{T,E}$（$l\geqslant 0$）可知：对每个固定的$t\in[0,\ T)$，存在$\{u^{(l)}\}$的一个子列$\{u^{(l_j)}\}$和

$V_0(t)\in D^m$，$v_1(t)\in D^{m-1}$，…，$V_m(t)\in L^2(\Omega)$，成立

$$\left.\begin{array}{ll} u\xrightarrow{\{l_j\}\text{弱}}V_0, & \text{在}D^m\text{中} \\ \partial_t u\xrightarrow{\{l_j\}\text{弱}}V_1, & \text{在}D^{m-1}\text{中} \\ \cdots\quad\cdots & \cdots \\ \partial_t^m u\xrightarrow{\{l_j\}\text{弱}}V_m, & \text{在}L^2(\Omega)\text{中} \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

因此，可得到$V_0=u(t)$，$\cdots V_m(t)=\partial^m{}_t u$，这样就得到问题的一个解$u(x,t)\in X_{4,T}$

且 $$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^\alpha{}_x\partial^\beta{}_t u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\leqslant E^2 \tag{3.11}$$

最后，为了说明$u\in X_{T,E}$，类似于定理2.1的说明，在$(-\delta_0,\ T+\delta_0)$上作出u后，对u的正则化序列u_δ限制在$[0,T]$上，应用类似于（2.15）的不等式得：应δ，$\delta'\to 0$时，在$[0,T]$上关于七一致地成立

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^\alpha{}_x\partial^\beta{}_t(u_\delta(t)-u_{\delta'}(t))||^2_{L^2(\Omega)}\to 0 \tag{3.12}$$

于是得$u\in X_T$，且$||u||_{xT}\leqslant E$。

把方程（1.6）关于t求k－2次导数后令t＝0，再利用3.1可得：

$\partial^k{}_t u|_{t=0}\in H_0{}^{2m-k-4}(\Omega)$ $k=0,1,\cdots,2m-4$。

解的唯一性可从形如（3.7）的估计得到。

4 初边值问题整体解的存在与唯一

引理4.1.设在问题中假定（H）、（H_2），成立，若$u\in X_{T,E}$是问题（G）的解，则存在与T无关的正常数E（$\leqslant E_0$）和C_0，有估计：

$$||u||^2_{H^m(\Omega)}+||u_t||^2_{H^{m-1}(\Omega)}+\int_0^t||u_t||^2_{H^m(\Omega)}d\tau$$
$$\leqslant C_0\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}||D^\alpha{}_x\partial^\beta{}_t u(0)||^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.1}$$

且有：$||u||_{L^\infty(\Omega)}0\uparrow$ $(t\uparrow+\infty)$时 (4.2)

证明：类似于文〔7〕中引理6的证明。

引理4.2.设引理4.1的条件满足，则存在与T无关的正常数E（$\leqslant E_0$）和C_0，若$u\in X_{T,E}$是问题的解，则必有估计：

$$||u||_{xT}\leqslant C_0||(\phi||_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+||\Psi||_{H^{2(m-1)}(\Omega)} \tag{4.3}$$

证明：对$u\in X_{T,E}$，利用正规化算子J_δ总可转化为$u\in X_{T,E}\cap X_{1,T}$。因而假设$u\in X_{T,E}\cap X_{1,T}$。

由（1.6）得：$$\sum_{k=0}^{m-2}\int_\Omega\partial^k{}_t L(u)\partial^k{}_t(-\Delta u_t)\,dx=0 \tag{4.4}$$

对微分算子p，记：

$R'^k{}_{ij}(p)=a_{ij}(u,D_{xt}u)\partial^k{}_t p u_{xixj}-\partial^k{}_t p(a_{ij}(u,D_{xt}u)u_{xixj})$；

$K'^k{}_{ij}(p)=(a_{ij}(u,D_{xt}u))_{xj}\partial^k{}_t p u_t\partial^k{}_t p u_{xi}$；

$\wedge'^{k}_{ij}(p)=1/2(a_{ij}(u,\ D_{xt}u))_t\partial^k_t p u_{xj}\partial^k_t p u_{xi}$;

$\omega'^{k}_{ij}(p)=a_{ij}\partial^k_t p u_{xi}\partial^k_t p n_{xj}$　　有：

$$\sum_{k=0}^{m-2}\int_\Omega \partial^k_t L(u)\partial^k_t(-\Delta u_t)dt=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(|\nabla\partial^{k+1}_t u|^2+\omega'^{k}_{ij}(\nabla))dx$$

$$+\sum_{i,j,k}\int_\Omega R'^{k}_{ij}(\Delta)\partial^k_t(\Delta u_t)dx+\int_\Omega(k'^{k}_{ij}(\nabla)-\Lambda'^{k}_{ij}(\nabla))dx]$$

$$-\sum_{k=0}^{m-2}\int_\Omega \partial^k_t b(u,D_{xt}u)\partial^k_t(\Delta u_t)dx+\sum_{k=0}^{m-2}\int_\Omega|\partial^k_t(\Delta u_t)|^2dx$$

由　$u\in X_{T,E}$及(H)成立，$m\geqslant 2[\frac{n}{2}]+3$，利用Sobolev不等式及引理3.1可得：

$$\sum_{i,j,k}[\int_\Omega R'^{k}_{ij}(\nabla)\partial^k_t(\nabla u_t)dx+\int_\Omega(k'^{k}_{ij}(\nabla)-\Lambda'^{k}_{ij}(\nabla))dx]$$

$$\leqslant C(E_0)E\sum_{k=0}^{m-2}(||\partial^k_t\Delta u_t||^2_{L^2(\Omega)}+||\partial^k_t\Delta u||^2_{L^2(\Omega)})$$

$$\sum_{k=0}^{m-2}\partial^k_t b(u,\ D_{xt}u)\partial^k_t(\Delta u_t)dx\leqslant C(E_0)E\sum_{k=0}^{m-2}||\partial^k_t\Delta u_t||^2_{L^2(\Omega)}$$

由此得：

$$0\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{d}{dt}\int_\Omega[|\nabla\partial_t^{k+1}u|^2+\sum_{ij=1}^{n}\omega'^{k}_{ij}(\nabla)]dx$$

$$+\sum_{k=0}^{m-2}||\partial^k_t(\Delta u_t)||^2_{L^2(\Omega)}-C(E_0)E\sum_{k=0}^{m-2}(||\partial^k_t\nabla u_t||^2_{L^2(\Omega)}+||\partial^k_t\nabla u||^2_{L^2(\Omega)})\qquad(4.5)$$

再由（1.6）得：

$$\sum_{k=0}^{m-2}\int_\Omega\partial_t^k L(u)\partial_t^k(-\Delta u)dx=0\qquad(4.6)$$

一方面：

$$\sum_{k=0}^{m-2}\int_\Omega\partial_t^k L(u)\partial_t^k(-\Delta u)dx=\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{m-2}\int_\Omega(\partial_t^k\nabla u_t\partial_t^k\nabla u+\frac{1}{2}|\partial_t^k\Delta u|)dx$$

$$-\sum_{k=0}^{m-2}\int_\Omega|\partial_t^k\nabla u_t|^2dx+\sum_{i,j,k}\int_\Omega\omega'^{k}_{ij}(\nabla)dx$$

$$+\sum_{i,j,k}\int_\Omega R'^{k}_{ij}(I)\partial_t^k(\Delta u)dx-\int_\Omega(a_{ij})x_j\partial^k_t\nabla u_{xi}\partial_t^k\nabla u dx$$

$$-\sum_{k=0}^{m-2}\int_\Omega\partial_t^k b\partial_t^k\Delta u d_x$$

利用与（4.5）类似的估计方法得：

$$0 \geqslant \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{m-2}\int_{\Omega}[\partial_t^k\nabla u_t\partial_t^k\nabla u+\frac{1}{2}|\partial_t^k\Delta u|^2]dx-\sum_{k=0}^{m-2}\int_{\Omega}|\partial_t^k\Delta u_t|^2dx$$

$$+v\sum_{k=0}^{m-2}||\partial_t^k\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}-C(E_0)E\sum_{k=0}^{m-2}(||\partial_t^k\Delta u_t||^2_{L^2(\Omega)}+||\partial_t^k\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}) \quad (4.7)$$

再由（1.1）得：$\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\Omega}\partial_t^kL(u)\partial_t^ku_tdx=0$　（4.8）

一方面：

$$\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\Omega}\partial_t^kL(u)\partial_t^ku_tdx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\Omega}(|\partial_t^ku_t|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\omega'^k_{ij}(I)dx$$

$$+\sum_{i,j,k}\int_{\Omega}[R'^k_{ij}(I)\partial_t^ku_tdx+\sum_{i,j,k}\int_{\Omega}[k'^k_{ij}(I)-\Lambda_{ij}'^k(I)]dx$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\Omega}(\nabla\partial_t^ku_t)^2dx-\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{m-1}\partial_t^kb(u,D_{xt}u)\partial_t^ku_tdx$$

利用与（4.5）类似的估计方法得：

$$0 \geqslant \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{m-1}(||\partial_t^{k+1}u(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}'^k(I)dx)$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}||\nabla\partial_t^ku_t||^2_{L^2(\Omega)}-C(E_0)E\sum_{k=0}^{m-1}(||\partial_t^k\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}+||\partial_t^k\nabla u_t||^2_{L^2(\Omega)}) \quad (4.9)$$

（4.5）+（4.9）+λ×（4.7）且令

$$E_\lambda(t)=\sum_{k=0}^{m-2}\int_{\Omega}[\lambda\partial_t^k\nabla u_t\partial_t^k\nabla u+\frac{\lambda}{2}|\partial_t^k\Delta u|^2+|\nabla\partial_t^{k+1}u|^2$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}'^k(\nabla)]dx+\sum_{k=0}^{m-1}(||\partial_t^{k+1}u(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}'^k(I)dx)$$ 得：

$$\frac{d}{dt}E_\lambda(t)+(1-\lambda-C(E_0)E)\sum_{k=0}^{m-2}||\partial_t^k\Delta u_t||^2_{L^2(\Omega)}+(\lambda v-C(E_0)E)\sum_{k=0}^{m-2}$$

$$||\partial_t^k\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}+(1-\lambda-C(E_0)E)\sum_{k=0}^{m-1}||\partial_t^k\Delta u_t||^2_{L^2(\Omega)}\leqslant 0$$

其中$0<\lambda<1$。

选ε_2这样小，使当$E\leqslant\varepsilon_2$时

$$C(E_0)E\leqslant\frac{1}{2}\min(1-\lambda,\ \lambda v)$$

则：$E_\lambda(t)-E_\lambda(0)\leqslant 0$

因为：$\nu_2\Big[\sum_{k=0}^{m-2}\big(\|\partial_t^k\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\Delta\partial_t^{k+1}u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\partial_t^k\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}$

$+\sum_{k=0}^{m-1}\big(\|\partial_t^{k+1}u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\partial_t^k\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\big)\Big]\leqslant E_\lambda(t)$

$\leqslant\nu_2^{-1}\Big[\sum_{k=0}^{m-2}\|\partial_t^k\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\partial_t^{k+1}u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\partial_t^k\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}$

$+\sum_{k=0}^{m-1}\big(\|\partial_t^{k+1}u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\partial_t^k\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big]$

得：$\sum_{k=0}^{m-2}\big(\|\nabla_t^{k+1}u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\partial_t^k\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{k=0}^{m-1}\big(\|\partial_t^{k+1}u\|^2_{L^2(\Omega)}$

$$+\|\partial_t^k\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\big)\leqslant C_0\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}\|D^\alpha_x\partial^\beta_t u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\qquad(4.10)$$

用归纳法可证，对每个满足$1\leqslant l\leqslant m$的整数l成立：

$$\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant l}\|D^\sigma_x\partial^\beta_t u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C_0\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}\|D^\alpha_x\partial^\beta_t u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\qquad(4.11)$$

事实上，$l=0$时，由（4.1）知结论成立。现设$l\leqslant m-1$时（4.11）成立，经证$i=m$时（4.11）亦成立。为此只须证对每个$0\leqslant J\leqslant m$有：

$$\sum_{|a|\leqslant J}\|D^\sigma_x\partial_t^{l-J}u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C_0\sum_{|\alpha|+\beta\leqslant m}\|D^\sigma_x\partial_t^\beta u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\qquad(4.12)$$

即可。

利用引理2.1可证得（4.12）成立。

由归纳法可知$l=m$时（4.11）成立。

对$k=0,\ 1,\ \cdots,\ m$逐个求得：

$$\|\partial_t^k u(0)\|_{H^{m-k}(\Omega)}\leqslant C(\|\phi\|_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+\|\psi\|_{H^{2(m-1)}(\Omega)})\qquad(4.13)$$

把（4.13）代入到（4.11）（此时$l=m$）整理得：

$$\|u\|_{X_T}\leqslant C_0(\|\phi\|_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+\|\psi\|_{H^{2(m-1)}(\Omega)})$$

定理4.1.设在问题（1.6）、（1.7）、（1.8）中假定条件（H）、（H_2）以及（H_3）成立，则存在正常数ε，使当初值满足$\|\phi\|_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+\|\psi\|_{H^{2(m-1)}(\Omega)}\leqslant\varepsilon$时，问题（G）存在唯一整体解$u(x,t)\in X2,\infty$且$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\to0(t\to+\infty$时）。

证明：令$\varepsilon=\min(\delta E\ \frac{\delta E}{C_0})$，这里$E(\leqslant E_0)$由引理4.2决定。当初值满足定理假设时，反复应用定理3.1和引理4.2就可以得到问题（1.6）、（1.7）、（1.8）存在唯一解$u(x,t)\in X\infty$，E。

再由引理4.1知：

$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\to0\qquad(t\to+\infty$时）。

5 方程组的情形

考虑如下的方程组的初边值问题：

$$\begin{cases} L[u]=u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n} A(u,D_{xt}u)u_{x_ix_j}-\Delta u_t+B(u,\ D_{xt}u) \\ \quad =0 \qquad (x,\ t)\in Q\infty & (5.1) \\ u(x,\ 0)=\phi(x);\ u_t(x,\ 0)=\psi(x) \qquad x\in\Omega & (5.2) \\ u|_{\Sigma\infty}=0 & (5.3) \end{cases}$$

其中，u(x,t)为J维向量值未知函数，A为J×J正定矩阵，B为J维向量值函数。将上述对一个方程情形的推导稍加推广，可得下面的

定理5.1　设在问题(G_3)中，A正定，且它的各元素，及B的各分量分别满足条件(H)，这里亦设(H_2)、(H_3)成立，则存在正常数ε，使当初值满足$||\phi||_{H^{2(m-1)}(\Omega)}+||\psi||_{H^{2(m-1)}(\Omega)}\leqslant$ ε时，问题(G_3)存在唯一整体解$u\in X2,\infty$且$||u||_{L\infty(\Omega)}\to 0$　$(t\to+\infty)$。

参 考 文 献

[1].Nagumo, J; Arimoto, S.and Yoshizawa, S.Proc IRE, 50(1962), 2061—2070。

[2].Arima, R.and Hasegawa, Y, proc.Japan, Acad, 39(1963), 721—725。

[3].Yamaguti, M.Proc.Japan.Acad, 39(1963), 726—730。

[4].Pao, C.V, J.Math.Anal, Appl.52(1975), 105—119。

[5].H.A.Δпр6kH.д.AHToM 265 1982(6)1316—1319。

[6].G.Ponci.Nonlinear Analynis thoreies, mathods and Applications Vol9 No5.1985 p339—418。

[7].魏光祖、赵占才，郑州大学学报1986.第三期。

[8].R.A.Adams，索伯列夫空间，人民教育出版社。

[9].李大潜，非线性发展方程，科学出版社(即将出版)。

The Initial And Boundary Value problem of A Nonlinear Sobolev's Develop Equations

Jang Huiqin Wei Guangzhu

Abstract In this paper, we mainly consider the following initial and boundary value problem:

$$\begin{cases} L[u]=u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u,\ D_{xt}u)u_{x_ix_j}-\Delta u_t+b(u,\ D_{xt}u)=0 \qquad x\in\Omega,\ t\geqslant 0 \\ u(x,0)=\phi(x), \qquad u_t(x,\ 0)=\psi(x) \\ u|_{\partial\Omega\times[0,\infty)}=0 \end{cases}$$

where Ω is a bounded open set in R^n with smooth boundary ∂Ω.More precisely,we proved the global existence and uniqueness and asymptotics of the solutions when $t\to+\infty$ to this problem.

key words: Galerkin's methods, sobolev's inequalities, local existen ce theory, Gronwall's inequalities, a decay estimates.