第10卷　第3期　　郑　州　工　学　院　学　报　　VOL.10 NO.3
1989年　9　月　　J.ZhengZhou Inst. of Technol.　　sept.　1989

向量范数、矩阵范数的应用

——线性方程组解的误差估计的推广

侯双印

（郑州工学院）

提　要：本文对［1］中线性方程组解的误差估计的定理作了推广，即证明了下面的定理：

定理　设1）矩阵$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$的摄动矩阵为$\delta=(\delta_{ij})\in C^{n\times n}$，向量$B=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T\in C^n$的摄动向量为$\delta^*=(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)^T\in C^n$；

2）$||A||_a$是与某向量范数$||X||_a$相容的算子范数；

3）A可逆，$B\neq(0, 0, \cdots, 0)^T$；

4）$||A^{-1}\delta||_a<1$，

如果　X，X^*分别满足

$$AX=B \qquad (A+\delta)X^*=B+\delta^*=B^*$$

则有　1° $$\frac{||X-X^*||_a}{||X||_a}\leqslant||A||_a||A^{-1}||_a\left(\frac{||B-B^*||_a}{||B||_a}+\frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}\cdot\frac{||B^*||_a}{||B||_a}\right)$$

2° $$\frac{||X-X^*||_a}{||X||_a}\leqslant\frac{||A||_a||A^{-1}||_a||B-B^*||_a}{||B||_a}+\frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}\left(1+\frac{||A||_a||A^{-1}\delta^*||_a}{||B||_a}\right)$$

关键词：矩阵范数；向量范数；算子范数；摄动向量；摄动矩阵。

1　予备知识

定义1　设矩阵$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$a_{ij}$的误差为$\delta_{ij}\in C$（$i, j=1, \cdots, n$）即准确矩阵为

$$(a_{ij})+(\delta_{ij})=(a_{ij}+\delta_{ij})$$

称　$\delta=(\delta_{ij})$为A的摄动矩阵。

定义2　设$B=(b_1, \cdots, b_n)^T\in C^n$，$b_k$的误差为$\delta_k\in C$（$k=1, \cdots, n$）即准确向量为

$$(b_1, \cdots, b_n)^T+(\delta_1, \cdots, \delta_n)^T=(b_1+\delta_1, \cdots, b_n+\delta_n)^T$$ 称$\delta^*=(\delta_1, \cdots, \delta_n)^T\in C^n$为B的摄动向量。

收到日期：1988.11.04

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

定义3 在$C^{n\times n}$中规定矩阵A的一个实函数，记作$||A||$，此函数若满足：

（1）正定条件：当$A\neq(0)$时，$||A||>0$；

（2）齐次条件：对任何$a\in C$，有$||aA||=|a|\ ||A||$；

（3）三角不等式：对任何A，$B\in C^{n\times n}$都有

$||A+B||\leqslant||A||+||B||$；

（4）对任何A，$B\in C^{n\times n}$都有$||AB||\leqslant||A||\cdot||B||$则称这个实函数$||A||$是方阵A的范数。

定义4 对任意$A\in C^{n\times n}$，$X\in C^n$，若向量范数$||X||_a$与矩阵范数$||A||$满足不等式

$$||AX||_a\leqslant||A||\,||X||_a$$

则称矩阵范数$||A||$与向量范数$||X||_a$是相容的，此时$||A||$记作$||A||_a$。

定义5 设$||X||_a$是C^n上的一个向量范数，对任何$A\in C^{n\times n}$，则

$$||A||=\max_{||X||_a=1}||AX||_a$$

是一个与$||X||_a$相容的方阵范数，称此方阵范数为从属于向量范数$||X||_a$的算子范数简，称$||A||_a$（$=||A||$）是与$||X||_a$）相容的算子范数。

引理 设矩阵$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$可逆，$||A||_a$是与某向量范数$||X||_a$相容的算子范数，δ为A的摄动矩阵，为$||A^{-1}\delta||_a<1$，则有

（1）$E+A^{-1}$可逆，且$||(E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a\leqslant\dfrac{1}{1-||A^{-1}\delta||_a}$

（2）$A+\delta$可逆

（3）$||A^{-1}(A+\delta)^{-1}||_a\leqslant\dfrac{||A^{-1}||_a||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}$

证明：（1）的证明

先证 $E+A^{-1}\delta$可逆

设任意$X\in C^n$且$X\neq(o,\cdots o)^T$则

$||(E+A^{-1}\delta)X||_a=||X+A^{-1}\delta X||_a\geqslant||X||_a-||A^{-1}\delta X||_a\geqslant||X||_a-||A^{-1}\delta||_a\times||X||_a=||X||_a(1-||A^{-1}\delta||_a)>0$

从而知 $(E+A^{-1}\delta)X=(0,\cdots,0)^T$只有零解，故$E+A^{-1}\delta$可逆。

次证 $||(E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a\leqslant\dfrac{1}{1-||A^{-1}\delta||_a}$

$\because(E+A^{-1}\delta)(E+A^{-1}\delta)^{-1}=E\Leftrightarrow(E+A^{-1}\delta)^{-1}+A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}=E\Leftrightarrow(E+A^{-1}\delta)^{-1}=E-A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}$

$\therefore||(E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a\leqslant||E||_a+||A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a\leqslant||E||_a+||A^{-1}\delta||_a\times||(E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a$

从而有 $||(E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a\leqslant\dfrac{||E||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

而 $||E||_a = \max\limits_{||X||_a=1} ||EX||_a = 1$

$\therefore\ ||(E+A^{-1}\delta)^{-1}|| \leqslant \dfrac{1}{1-||A^{-1}\delta||_a}$。

（2）的证明

$\because A+\delta = A(E+A^{-1}\delta)$

而　A，$E+A^{-1}\delta$均可逆

$\therefore$　$A+\delta$可逆

（3）的证明

$\because$　$A^{-1}-(A+\delta)^{-1} = A^{-1}-(A(E+A^{-1}\delta))^{-1} = [E-(E+A^{-1}\delta)^{-1}]A^{-1}$

　　而 $(E+A^{-1}\delta)^{-1} = E-A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}$

$\therefore A^{-1}-(A+\delta)^{-1} = A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}$

又　$||(E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a \leqslant \dfrac{1}{1-||A^{-1}\delta||_a}$

$$\therefore ||A^{-1}-(A+\delta)^{-1}||_a \leqslant ||A^{-1}\delta||_a ||(E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a ||A^{-1}||_a$$

$$\leqslant \frac{||A^{-1}||_a ||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}$$

2　线性方程组解的误差估计的推广

定理　设1）矩阵$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$的摄动矩阵为$\delta=(\delta_{ij})\in C^{n\times n}$，向量$B=(b_1,\cdots,b_n)^T\in C^n$的摄动向量为$\delta^*=(\delta_1,\delta_2,\cdots\delta_n)^T\in C^n$；

2）$||A||_a$是与某向量范数$||X||_a$相容的算子范数；

3）A可逆，$B\neq(o,\cdots o)^T$；

4）$||A^{-1}\delta||_a<1$，

如果X，X^*分别满足

$AX=B \qquad (A+\delta)X^*=B+\delta^*=B^*$

则有　$1°\ \dfrac{||X-X^*||_a}{||X||_a} \leqslant ||A||_a||A^{-1}||_a\left(\dfrac{||B-B^*||_a}{||B||_a}+\dfrac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}\ \dfrac{||B^*||_a}{||B||_a}\right)$

$$2°\ \frac{||X-X^*||_a}{||X||_a} \leqslant \frac{||A||_a||A^{-1}||_a||B-B^*||_a}{||B||_a}+\frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}\cdot\left(1+\frac{||A||_a||A^{-1}\delta^*||_a}{||B||_a}\right)$$

证明：1°的证明

$\because$　A，$A+\delta$都可逆

$\therefore$　$X-X^*=A^{-1}B-(A+\delta)^{-1}B^*$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$=A^{-1}B-A^{-1}B^{*}+A^{-1}B^{*}-(A+\delta)^{-1}B^{*}$$

$$=A^{-1}(B-B^{*})+(A^{-1}-(A+\delta)^{-1})B^{*}$$

故 $||X-X^{*}||_a\leqslant||A^{-1}(B-B^{*})||_a+||(A^{-1}-(A+\delta)^{-1})B^{*}||_a$

$$\leqslant||A^{-1}||_a||(B-B^{*})||_a+||A^{-1}-(A+\delta)^{-1}||_a||B^{*}||$$

而 $\dfrac{1}{||X||_a}\leqslant\dfrac{||A||_a}{||B||_a}$

$$||A^{-1}-(A+\delta)^{-1}||\leqslant\frac{||A^{-1}||_a||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\partial||_a}$$

$$\therefore\ \frac{||X-X^{*}||_a}{||X||_a}\leqslant||A||_a||A^{-1}||_a\left(\frac{||B-B^{*}||_a}{||B||_a}+\frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}\ \frac{||B^{*}||_a}{||B||_a}\right)$$

2°的证明

$\because X-X^{*}=A^{-1}(B-B^{*})+(A^{-1}-(A+\delta)^{-1})B^{*}$

而 $A^{-1}-(A+\delta)^{-1}=A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}$

$B^{*}=B+\delta^{*}$

$$\therefore\ X-X^{*}=A^{-1}(B-B^{*})+A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}B+A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}\delta^{*}$$

$$\begin{aligned}||X-X^{*}||&\leqslant||A^{-1}(B-B^{*})||_a+||A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}B||_a\\&\quad+||A^{-1}\delta(E+A^{-1}\delta)^{-1}A^{-1}\delta^{*}||_a\\&\leqslant||A^{-1}||_a||E-B^{*}||_a+||A^{-1}\delta||_a||E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a||A^{-1}B||_a\\&\quad+||A^{-1}\delta||_a||(E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a||A^{-1}\delta^{*}||_a\end{aligned}$$

又 $A^{-1}B=X$　　　$||A^{-1}B||_a=||X||_a$

$$\frac{1}{||X||_a}\leqslant\frac{||A||_a}{||B||_a}$$

$$||(E+A^{-1}\delta)^{-1}||_a\leqslant\frac{1}{1-||A^{-1}\delta||_a}$$

$$\therefore\ \frac{||X-X^{*}||_a}{||X||_a}\leqslant\frac{||A||_a||A^{-1}||_a||B-B^{*}||_a}{||B||_a}+\frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}||_a}\times$$

$$\left(1+\frac{||A||_a||A^{-1}\delta^{*}||_a}{||B||_a}\right)$$

推论1　当 $\delta=(0)_{n\times n}$ 时，由1°得

$$\frac{||X-X^{*}||_a}{||X||_a}\leqslant||A||_a||A^{-1}||_a\frac{||B-B^{*}||_a}{||B||_a}$$

推论2　当　$B=B^{*}$ 即 $\delta^{*}=(o)_{n\times n}$ 时，有

$$\frac{||X-X^{*}||_a}{||X||_a}\leqslant||A||_a||A^{-1}||_a\frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

及
$$\frac{||X-X^*||_a}{||X||_a}\leqslant\frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}$$

从而有

$$\frac{||X-X^*||_a}{||X||_a}\leqslant\min\left(||A||_a||A^{-1}||_a\frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a},\ \frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}\right)$$

推论3 当$B=B^*$时，且$||\delta||_a||A^{-1}||_a<1$时，有

$$\frac{||X-X^*||_a}{||X||_a}\leqslant\frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a}\leqslant\frac{||A||_a||A^{-1}||_a\dfrac{||\delta||_a}{||A||_a}}{1-||A||_a||A^{-1}||_a\dfrac{||\delta||_a}{||A||_a}}$$

推论1，3分别为〔1〕中定理3.4.3及定理3.4.4.

参 考 文 献

〔1〕 丁学仁 蔡高厅编《工程中的矩阵理论》天津大学出版社 1985年9月第一版
〔2〕 π.A.刘斯铁而尼克.B.N.索伯列夫著《泛函分析概要》科学出版社 1964年

Applicatioa of Vector norm and matrix norm——A generalization of error estimate of solution of linear equations

Hou Shuangyin

(Zhengzhou Lnstitute of Technology)

AbStract In this paper, the theorem of estimation of error about the solution of linear eguations is extended, i.e., the following result is obtained.

Theorem Let 1) $\delta=(\delta_{ij})\in C^{n\times n}$ be disturbance matrix of $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, $\delta^*=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)^T\in C^n$ be disturbance Vector of $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in C^n$;

2) $||A||_a$ be an operator norm compatible with a vector norm $||X||_a$;

3) A be an invertibie matrix, $B\neq(o,\cdots,o)^T$;

4) $||A^{-1}\delta||_a<1$,

If there exist X, X^* such that

$$AX=B\qquad(A+\delta)X^*=B+\delta^*=B^*$$

then

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$1^\circ \quad \frac{||X-X^*||_a}{||X||_a} \leqslant ||A||_a ||A^{-1}||_a \left(\frac{||B-B^*||_a}{||B||_a} + \frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a} \frac{||B^*||_a}{||B||_a} \right)$$

$$2^\circ \frac{||X-X^*||_a}{||X||_a} \leqslant \frac{||A||_a ||A^{-1}||_a ||B-B^*||_a}{||B||_a} + \frac{||A^{-1}\delta||_a}{1-||A^{-1}\delta||_a} \times$$

$$\left(1+\frac{||A||_a ||A^{-1}\delta^*||_a}{||B||_a}\right)$$

keywords: matrix norm; vector norm; operator norm; disturbance vector; disturbance matrix.

（上接90页）

阻的增大而增大，另外电压表所分流的实际上是测量点附近电流线上的电流，因而使分流效果就更加显著，分流的结果使测量的电位值比实际电位值偏小，例如图一中4.0伏之等位线，实际上却为4.1伏之电位。如果4.0伏之等位线不应该闭合的话，那么4.1伏之等位线就不一定也不闭合了，因而它与1.0伏之等位线在外形上就不会对称了。另外，又由于电压表在高电位电极附近的读数值比实际值偏小，所测之等位线向高电位电极趋近，结果使该处的等位线本来就密的情况下更加变密，从而造成两电极附近等位线在密度上的不对称。同时也揭示出在高电位电极附近等位线更难测定的原因，显然是由于在该电极附近等位线的密度值比正常值更大的缘故。对于同轴柱面电极，在高电位的轴线电极附近等位点难以测定的原因也是如此。

4、在电压表直读法测绘静电场中，由于电压表的分流作用而存在一定的系统误差，由上面的讨论可知，若减少该误差的影响，就必须选用高内阻的电压表进行测量，例如选用电子管繁用表的电压档等，也可得到较满意的效果。

三、小　结

从以上分析看出，在“模拟法测绘静电场”的实验中，比较理想的测试方法就是电位差计指零法。因为从理论上来说，当测量平衡时没有电流从检流计通过，不影响原来电流场的分布。从实验上也得到了证实，另外用电位差计指零法所测出的等位线是百分比，可以通用。如要确定其绝对值也不难，只要把精密型金属膜电阻串联成电压等分器就可实现，电压等分器的总阻值约等于所测两电极间的电阻值为宜。总之，我们认为，在用电压表直读法描绘静电场时，绝对不能选用内阻比较低的电压表来进行测量，因为它不但不能模拟原来场的分布规律，反而会使学生对模拟法的正确性产生怀疑，造成不良后果。

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net