第10卷 第3期　　郑 州 工 学 院 学 报　　VOL.10 NO.3
1989年 9 月　　J. ZhengZhou Inst. of Technol.　　sept. 1989

复合函数的黎曼可积

蒋逢海

（数力系）

提 要：本文用具体例子说明：黎曼可积函数的黎曼可积函数，不一定黎曼可积。连续函数的黎曼可积函数也不一定是黎曼可积的。但是，本文指出并论证了下述结论：黎曼可积函数的连续函数必定黎曼可积。

关键词　黎曼积分、复合函数

我们已经知道在区间[a,b]上连续函数的连续函数仍然在区间[a,b]上连续；在区间[a,b]上可导函数的可导函数仍在区间[a,b]上可导；那么，我们自然会问：在[a,b]上黎曼可积函数的黎曼可积函数仍然在区间[a,b]可积吗？其答案却是否定的。请看下面的例子：

例：设

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\leq 1\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p} & x=\dfrac{q}{p}\quad (p>0,\ p,q\text{为互质的整数})\\ 0 & x\text{是无理数}\end{cases}\qquad x\in[0,1]$$

由于f(x)在区间[0,1]上是只有一个间断点的连续函数，故f(x)在[0,1]上黎曼可积。黎曼函数g(x)在区间[0,1]上黎曼可积。（这在通常的数学分析教科书上都有证明。）但是，它们的复合函数：

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & x=\dfrac{q}{p}\quad (p>0,\ pq\text{为互质整数})\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}\qquad x\in[0,1]$$

显然在区间[0,1]不是黎曼可积的。

因此我们得出结论：黎曼可积函数的黎曼可积函数不一定黎曼可积。

下面我们把条件改为：若函数f(x)在区间[a,b]上黎曼可积，g(x)在区间[a,b]上满足李普希兹条件。那么，复合函数f[g(x)]在区间[a,b]上是否黎曼可积呢？答案仍然是否定的。请看下面的例子。

例：设 $f(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 1-\dfrac{1}{2}(b-a)+\left|x-\dfrac{1}{2}(a+b)\right| & x\text{属于构造}A\text{时}\end{cases}$$

从[0,1]移走的一个区间$I=(a,b)$，

其中A是[0,1]上任一正测度的康托尔集。

由于$f(x)$是区间[0,1]上只有一个间断点的连续函数，故$f(x)$在区间[0,1]上黎曼可积。

$g(x)$在[0,1]上满足李普希兹条件，即对$\forall x_1,x_2\in[0,1]$都有$|g(x_1)-g(x_2)|\leq|x_1-x_2|$。事实上，若$x_1,x_2\in A$时，显然有$|g(x_1)-g(x_2)|=0<|x_1-x_2|$；若$x_1,x_2\in I=(a,b)$时则有：$|g(x_1)-g(x_2)|=\left||x_1-\frac{1}{2}(a+b)|-|x_2-\frac{1}{2}(a+b)|\right|\leq|x_1-x_2|$；

若$x_1\in A$，$x_2\in I=(a,b)$，则有

$$|g(x_1)-g(x_2)|=\left|\frac{1}{2}(b-a)-|x_2-\frac{1}{2}(a+b)|\right|=\begin{cases}|b-x_2| & x_2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)\\ |x_2-a| & x_2<\frac{1}{2}(a+b)\end{cases}$$

$\leq|x_1-x_2|$；若$x_2\in A$，$x_1\in I=(a,b)$也有类似的结果。但是它们的复合函数：

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\text{属于构造}A\text{时从}[0,1]\text{移走的一个区间}I=(a,b)\end{cases}$$

在区间[0，1]上不是黎曼可积的。这是因为复合函数$f[g(x)]$的间断点集是A，而A有正测度，故$f[g(x)]$在区间[0,1]上不黎曼可积。

从这个例子可以得出：满足李普希兹条件的函数的黎曼可积函数不一定黎曼可积。另一方面在区间[a,b]上满足李普希兹条件的函数必在区间[a,b]上连续，故可得出：连续函数的黎曼可积函数不一定黎曼可积。

但是，我们指出：黎曼可积函数的连续函数必定黎曼可积。

设$g(x)$在区间[a，b]上黎曼可积，M和m是它在区间[a，b]的上确界和下确界。函数$f(x)$在[m，M]上连续，那么复合函数$h(x)=f[g(x)]$在区间[a，b]上黎曼可积。

证明：设$C=\max\limits_{m\leq x\leq M}|f(x)|$　　$\forall\varepsilon>0$，取$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{b-a+2c}$因为$f(x)$在闭区间[m，M]连续。所以$f(x)$在区间[m，M]上必定一致连续。故$\exists\ \delta>0$，对$\forall x_1$，$x_2\in[m,M]$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，总有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_1$。再取$\delta<\varepsilon_1$，由函数$g(x)$在[a,b]上的黎曼可积性知，存在区间[a,b]的一个分法T：$\{x_k\}$即：

$a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$，使得，$S-s<\delta^2$。其中S和s是函数$g(x)$在[a，b]上相应于分法T：$\{x_k\}$的达布上和和达布下和。

假设：$M_k=\sup\limits_{x\in[x_{k-1},\ x_k]}g(x)$　　$m_k=\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}g(x)$；

$M_k^*=\sup\limits_{x\in[x_{k-1},\ x_k]}h(x)$　　$m^*_k=\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}h(x)$；

其中，$h(x)=f[g(x)]$

把整数1，2，3，…，n分成两个集合A与B：若$M_k-m_k<\delta$时，脚码$K\in A$；若M_P-m_P

$>\delta$时，脚码$P\in B$。

首先，当$K\in A$时，由$M_k-m_k<\delta$及$f(x)$在区间$[m, M]$上的一致连续性，可得出：

$M_k^*-m_k^*\leqslant\varepsilon_1$

其次，当$K\in B$时，显然有$M^*_k-m^*_k\leqslant 2C$

设S^*与s^*分别是函数$h(x)=f[g(x)]$在区间$[a, b]$上相应于分法T：$\{x_k\}$的达布上和与达布下和。那么：$S^*-s^*=\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k^*-m_k^*)\cdot\Delta x_k$

$$=\sum_{k\in A}(M^*_k-m^*_k)\cdot\Delta x_k+\sum_{k\in B}(M^*_k-m^*_k)\Delta x_k$$

$$\leqslant\varepsilon_1(b-a)+2C\sum_{k\in B}\Delta x_k$$

而$\delta\cdot\sum\limits_{k\in B}\Delta X_K\leq\sum\limits_{k\in B}(M_k-m_k)\cdot\Delta x_k\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\cdot\Delta x_k$注意到前面：$\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\cdot\Delta x_k=S-s<\delta^2$。故有$\sum\limits_{k\in B}\Delta x_k<\delta$

综上所述有：

$$S^*-s^*\leqslant\varepsilon_1(b-a)+2C\sum_{k\in B}\Delta x_k\leqslant\varepsilon_1(b-a)+2C\cdot\delta$$

$$<\varepsilon_1(b-a)+2c\cdot\varepsilon_1\qquad(\because\ \delta<\varepsilon_1)$$

$$=\varepsilon_1(b-a+2c)=\varepsilon$$

这就证明了函数$h(x)=f[g(x)]$在区间$[a, b]$上是黎曼可积的。

这个命题结论为我们判断某些函数的黎曼可积性提供了方便。如若$f(x)$在区间$[a, b]$黎曼可积，由此结论直接可以得出$|f(x)|^\alpha(\alpha>0)$在区间$[a, b]$上也是黎曼可积的。

参　考　文　献

[1] 金福临等编著复旦大学数学系陈传璋、《数学分析》1984.2

[2] (美)B.R盖尔鲍姆.J.M.H奥姆斯特德著《分析中的反例》1981.4

[3] (美)W.Rudin《实分析和复分析》　1982.10

[4] 江泽坚.吴智泉合编《实变函数论》　1978.10

[5] 王建午.曹之江等编著《实数的构造理论》1981.6

Riemann Integrability of Function of Functions

Jiang feng hai

(Department of Mathematics physics and Dynamics)

Abstract This paper demonstrates that the Riemann integrable function of Riemann integrable function is not necessariy Riemann integrable, nor is Riemann integrable function of continuous function. This paper has drawn and proved the conclusion that continuous function of Riemann integrable function is certainly Riemann integrable.

Key words: Riemann integral, composite functions.