第10卷　第3期　　郑州工学院学报　　VOL.10 NO.3
1989年　9 月　　J.ZhengZhou Inst.of Technol.　　sept.　1989

# 对于模糊集合模糊度的探讨

孟庭芳　　齐春耕

（数力系）

**提　要：** 本文指出了常用模糊度的局限性，定义了元素u（$u\in U$）对于模糊集$\underset{\sim}{A}$的模糊度$F\underset{\sim}{A}(u)$，模糊集合$\underset{\sim}{A}$的集合模度$F(\underset{\sim}{A})$，$\underset{\sim}{A}$的平均模糊度$\overline{F}(\underset{\sim}{A})$，$\underset{\sim}{A}$的加权平均模糊度$\hat{F}(\underset{\sim}{A})$，$\underset{\sim}{A}$的模糊均方差$\sigma(\underset{\sim}{A})$，并用λ水平截集的思想定义了$\underset{\sim}{A}$的λ上截集，λ一下截集，指出了$\underset{\sim}{A}$的各种不同程度的模糊域与清晰域。

**关键词：** 数学理论，模糊集，模糊度，集合模糊度

## 1　模糊集$\underset{\sim}{A}$的常用模糊度的局限性

模糊集合$\underset{\sim}{A}$的模糊度定义常用〔1〕中$p_{20--21}$所给出的结果。

**定义1.10.**（Luca—Termini）映射

$D$：$F(U)\to[0,1]$

叫做$F(U)$上的模糊度，如果它满足：

（D·1）　$A\in P(U)\Leftrightarrow D(A)=0$

（D·2）　$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\equiv 0.5\Rightarrow D(\underset{\sim}{A})=1$；

（D·3）　若对任意的$u\in U$，有

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant\mu_{\underset{\sim}{A}'}(u)\geqslant 0.5$

或者$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}'}(u)\leqslant 0.5$

则　$D(\underset{\sim}{A})\leqslant D(\underset{\sim}{A}')$

并且当$U=\{u_1,\cdots,u_n\}$时，有下面周知的定义：

定义1·2：设$A\in F(U)$，记

$$\overset{\smile}{H}(\underset{\sim}{A})=K\sum_{i=1}^{n}S(\mu_{\underset{\sim}{A}}(ui))\cdots\cdots(1\cdot 77)$$

叫做模糊集$\underset{\sim}{A}$的熵，此处：

$$K=\frac{1}{n\ln 2}\cdots\cdots(1\cdot 78)$$

而S（x）是仙农函数：

$$S(x)=-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)\cdots\cdots(1\cdot 79)$$

容易验证：若取$\widetilde{H}(\underset{\sim}{A})$作为模糊度。

$$D(\underset{\sim}{A})\overset{\triangle}{=}\widetilde{H}(\underset{\sim}{A})$$

则　$D(\underset{\sim}{A})$满足定义1·10中（D·1）—（D·3）的要求。除此之外，它还满足下面两条性质：

（D·4）　　$D(\underset{\sim}{A})=D(\underset{\sim}{A}^c)$；

（D·5）　　$D(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})=D(\underset{\sim}{A})+D(\underset{\sim}{B})-D(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})$

上述模糊度定义的局限性在于：

1·1　仅仅适用于论域U为有限集的情况，对于U为无限集的情况，不能用$\widetilde{H}(\underset{\sim}{A})$作为$D(\underset{\sim}{A})$

例1：设U为自然数集，$\underset{\sim}{A}$表示“小”，显然$\underset{\sim}{A}\in F(U)-P(U)$　　令$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)=\frac{1}{x_i}$，$x_i\in U$，

首先考虑U：{1，2，…，n}　则

$$\widetilde{H}(\underset{\sim}{A})=\frac{1}{n\ln 2}\{0+\sum_{k=2}^{n}[-\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}-(1-\frac{1}{k})\ln(1-\frac{1}{k})]\}=\frac{1}{n\ln 2}[\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k-1)}{K}-\ln n]$$

当U={1，2，…，n，…}，我们自然改想到

$$\text{令}\widetilde{H}(\underset{\sim}{A})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\ln 2}[\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k-1)}{K}-\ln n]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\ln 2}\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k-1)}{K}-0$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\ln 2}\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k-1)}{K}\geqslant 0$$

$$\text{又}\because\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k-1)}{K}<\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{K}<\frac{\ln 3}{3}+\int_3^n\frac{\ln x}{x}dx$$

$$=\frac{\ln 3}{3}+\frac{1}{2}\ln^2 n$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\ln 2}\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k-1)}{K}\leqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln 3}{3n\ln 2}+\frac{\ln^2 n}{2h\ln 2}=0$$

$$\therefore \overset{\frown}{H}(\underset{\sim}{A})=0$$

$\underset{\sim}{A}$不属于$\mathbf{P}_{(U)}$，但是$\overset{\frown}{H}(\underset{\sim}{A})=0$，它不满足定义1·10中的（D·1），因此，此时$\overset{\frown}{H}(\underset{\sim}{A})$不能作为$\underset{\sim}{A}$的模糊度。

1·2.用熵作为模糊度，实质上是$\underset{\sim}{A}$中各处模糊度的平均值，抹煞了$\underset{\sim}{A}$中各处模糊度不均匀的差别。甚至可能出现，在论域U的某些地方一个模糊度小的模糊集比一个模糊度大的模糊集更加模糊。

例2：$\underset{\sim}{A}=1/a+0.4/b+0.4/c$

$\underset{\sim}{B}=0.3/a+0.3/b+1/c$

不难验证：$\overset{\frown}{H}(\underset{\sim}{A})>\overset{\frown}{H}(\underset{\sim}{B})$

但在a处，a对$\underset{\sim}{B}$比a对$\underset{\sim}{A}$更加模糊。

因而，笔者认为有必要对$\underset{\sim}{A}$的模糊度概念作进一步改进。

## 2、U对$\underset{\sim}{A}$的模糊度及$\underset{\sim}{A}$的集合模糊度

**定义2·1**：设 $\underset{\sim}{A}\in\mathbf{F}(U)$，对于任意的$u\in U$，都规定一个数 $F_{\underset{\sim}{A}}(u)\in[0,1]$，其中$F_{\underset{\sim}{A}}(u)$满足：

i）当且仅当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=1$或 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=0$时，

$F_{\underset{\sim}{A}}(u)=0$；

ii）当$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=\frac{1}{2}$时， $F_{\underset{\sim}{A}}(u)=1$；

iii）当 $\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)-\frac{1}{2}\right|\leqslant\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(u')-\frac{1}{2}\right|$时，

$F_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant F_{\underset{\sim}{A}}(u')$

则称 $F_{\underset{\sim}{A}}(u)$为u对$\underset{\sim}{A}$的模糊度，

$F_{\underset{\sim}{A}}$：$U\longrightarrow[0,1]$

$u\longrightarrow F_{\underset{\sim}{A}}(u)$

叫做$\underset{\sim}{A}$的模糊函数：

例1：

$$F_{\underset{\sim}{A}}(u)=\begin{cases}1 & \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\in(0,1)\\ 0 & \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\in\{0,1\}\end{cases}$$

显然满足定义要求，不妨称为二值模糊度。

例2：　$F_{\underset{\sim}{A}}(u)=\mathrm{sim}\cdot(\pi\cdot\mu_{\underset{\sim}{A}}(u))$ 也满足定义要求，不妨称为正弦模糊度。

例3：$F_{\underset{\sim}{A}}(u)=\frac{1}{1_n 2}S(\mu_{\underset{\sim}{A}}(u))$，其中 $S(x)$ 为仙农函数，$F_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 也满足定义要求，不妨称为仙农模糊度。

例4：$F_{\underset{\sim}{A}}(u)=1-2\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)-\frac{1}{2}\right|$，满足定义要求，不妨称为线性模糊度。

以上u对$\underset{\sim}{A}$的四种模糊度，除满足定义中的三项要求外，不难证明，它们还满足：

iV）　$F_{\underset{\sim}{A}}(u)=F_{\underset{\sim}{A}^c}(u)$

V）　$F_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(u)=F_{\underset{\sim}{A}}(u)+F_{\underset{\sim}{B}}(u)-F_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(u)$

当然，并非一切模糊度都能满足iv）和v）

例5：

$$F_{\underset{\sim}{A}}(u)=\begin{cases}1-2(\mu_{\underset{\sim}{A}}(\mu)-0.5), & \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant 0.5\\ \sin(\pi\cdot\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)), & \mu_{\underset{\sim}{A}}(\mu)<0.5\end{cases}$$

$F_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 满足定义中的前三条要求，但并不满足iv）

**定义2·2**　设 $\mathbf{F}(U)$ 到它自身的一个映射：

$$F:\ \mathbf{F}(U)\to\mathbf{F}(U)$$

$$\underset{\sim}{A}\to F(\underset{\sim}{A})=\underset{\sim}{B}$$

其中$F(\underset{\sim}{A})$的隶属度正好是u对$\underset{\sim}{A}$的模糊度，即　$\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)=F_{\underset{\sim}{A}}(u)$

则称模糊集合 $F(\underset{\sim}{A})$ 为$\underset{\sim}{A}$的集合模糊度。

实质上，$\underset{\sim}{A}$的集合模糊度是以$\underset{\sim}{A}$的模糊函数作为隶属函数的模糊集合。这样描述$\underset{\sim}{A}$的模糊程度可以避免平均掩盖模糊度不均匀的缺陷，而且也适用于无限论域的情况。

例6、设$\underset{\sim}{A}=0.1/a+1/b+0.4/c$

$$\underset{\sim}{A}'=1/1+0.5/2+\cdots+\frac{1}{n}/n+\cdots$$

由　$F_{\underset{\sim}{A}}(u)=1-2\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)-\frac{1}{2}\right|$

则　$F(\underset{\sim}{A})=0.2/a+0/b+0.8/c$

$$F(\underset{\sim}{A}')=0/1+1/2+\cdots+\frac{2}{n}/n+\cdots' \qquad n=2,3,\cdots$$

又如：$\underset{\sim}{A}=\int_U \mu_A(x)/x$

则　$F(\underset{\sim}{A})=\int_U F_{\underset{\sim}{A}}(x)/x$

集合模糊度 $F(\underset{\smile}{A})$ 比较详细地、全面地描述了$\underset{\smile}{A}$的模糊度，但是比较繁琐，我们希望用一个简明的数字，概括地描述$\underset{\smile}{A}$的模糊特征。为此，我们定义$\underset{\smile}{A}$的平均模糊度与$\underset{\smile}{A}$的模糊均方差。

## 3　$\underset{\smile}{A}$的平均模糊度与$\underset{\smile}{A}$的模糊度均方差

**定义3·1**：集合$\underset{\smile}{A}$的平均模糊度$\overline{F}(\underset{\smile}{A})$是指：

i）当$U=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$时

则 $$\overline{F}(\underset{\smile}{A})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_{\underset{\smile}{A}}(x_i)$$

ii）当$U=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\cdots$

则 $$\overline{F}(\underset{\smile}{A})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_{\underset{\smile}{A}}(x_i)$$

iii）当$U$：$[a, b]\subset R$

则　定义：$$\overline{F}(\underset{\smile}{A})=\frac{1}{b-a}\int_a^b F_{\underset{\smile}{A}}(x)\,dx$$

注：此定义不满足常用模糊度定义的要求。

如1,中的例1

论域U中各个元素u在我们的心目中并不平等。有时，根据实际需要，某些元素对于我们显得更重要些。在考查$\underset{\smile}{A}$的模糊程度时，为了显示出这个特点，我们给出$\underset{\smile}{A}$的加权平均模糊度的定义：

**定义3·2**：$\underset{\smile}{A}$的加权平均模糊度$\hat{F}(\underset{\smile}{A})$是指：

i）当U为有限论域时：

$$\hat{F}(\underset{\smile}{A})=\sum_{i=1}^{n}\omega(x_i)F_{\underset{\smile}{A}}(x_i)\qquad x_i\in U$$

其中 $$\sum_{i=1}^{n}\omega(x_i)=1,\ \omega(x_i)\geqslant 0\qquad i=1, 2, \cdots, n$$

ii）当U为无限可到论域时，

$$\hat{F}(\underset{\smile}{A})=\sum_{i=1}^{\infty}\omega(x_i)F_{\underset{\smile}{A}}(x_i)$$

其中 $$\sum_{i=1}^{\infty}\omega(x_i)=1,\ \omega(x_i)\geqslant 0\qquad i=1, 2, \cdots$$

iii）当$U\subset R$时，且$\omega(x)$，$F_{\underset{\smile}{A}}(x)$在U上可积，$\int_U \omega(x)\,dx=1$，$\omega(x)\geqslant 0$

则　$\hat{F}(\underset{\smile}{A}) = \int_U' \omega(x) F_{\underset{\smile}{A}}(x)\,dx$

特别当　$U = [a, b] \subset R$，时

$\bar{F}(\underset{\smile}{A}) = \int_a^b \omega(x) F_{\underset{\smile}{A}}(x)\,dx$

为了描述$\underset{\smile}{A}$中各处模糊程度的离散程度，我们定义$\underset{\smile}{A}$的模糊均方差：

**定义3·3：**$\underset{\smile}{A}$的模糊均方差$\delta(\underset{\smile}{A})$是指：

i）当U为有限集合时：

$$\delta(\underset{\smile}{A}) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[F_{\underset{\smile}{A}}(xk) - \bar{F}(\underset{\smile}{A})]^2}$$

ii）当U为无限可列集时：

$$\delta(\underset{\smile}{A}) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[F_{\underset{\smile}{A}}(x) - \bar{F}(\underset{\smile}{A})]^2}$$

iii）一般：

$$\delta(\underset{\smile}{A}) = \int_U \omega(x)[F_{\underset{\smile}{A}}(x) - \bar{F}(\underset{\smile}{A})]^2 dx$$

其中 $\int_U \omega(x)\,dx = 1$，　　$\omega(x) \geqslant 0$

特别当　$U = [a, b]$时，

$$\delta(\underset{\smile}{A}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b F_{\underset{\smile}{A}}(x) - \bar{F}(\underset{\smile}{A})]^2 dx$$

当U为有限论域时，我们还可以用数理统计的方法定义$\underset{\smile}{A}$的模糊中位数、模糊众数、模糊极差，近似描述$\underset{\smile}{A}$的平均模糊度以及$\underset{\smile}{A}$的模糊离散程度，这里不再赘述。

对于前边的几个概念，我们举例予以说明：

例1：$\underset{\smile}{A} = 1/a + 0.9/b + 0.4/c + 0.2/d + 0.1/e$

取：$F_{\underset{\smile}{A}}(x_i) = |-2|\mu_{\underset{\smile}{A}}(x_i) - \frac{1}{2}|$

则　$F(\underset{\smile}{A}) = 0/a + 0.2/b + 0.8/c + 0.4/d + 0.2/e$

$\bar{F}(\underset{\smile}{A}) = \frac{1}{5}(0 + 0.2 + 0.8 + 0.4 + 0.2) = 0.32$

若取权数　$\omega(a) = \frac{1}{10}$，　$\omega(b) = \frac{1}{5}$，　$\omega(c) = \frac{2}{5}$，　$\omega(d) = \frac{1}{5}$，

$\omega(e) = \frac{1}{10}$

则　$\bar{F}(\underset{\smile}{A}) = 0\times\frac{1}{10} + 0.2\times\frac{1}{5} + 0.8\times\frac{2}{5} + 0.4\times\frac{1}{5} + 0.2\times\frac{1}{10} = 0.46$

$$\delta(\underset{\sim}{A})=\sqrt{\frac{0.32^2+0.12^2+0.48^2+0.08^2+0.12^2}{5}}$$

## 4、F（$\underset{\sim}{A}$）的λ上截集和λ下截集

为了能够方便地指出一个模糊集合$\underset{\sim}{A}$的不同程度的模糊域和清晰域，下边介绍一种方法：

仿照一般模糊集的λ水平截集的思想，我们定义了F（$\underset{\sim}{A}$）的λ上截集和λ下截集：

**定义4·1** $F_\lambda\uparrow(\underset{\sim}{A})=\{u/F_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant\lambda\}$

$F_\lambda\downarrow(\underset{\sim}{A})=\{u/F_{\underset{\sim}{A}}(u)<\lambda\}$

分别称为F（$\underset{\sim}{A}$）的λ上截集和λ下截集。分别用来表示$\underset{\sim}{A}$的各种不同程度的模糊域和清晰域。特别把$F_1\uparrow(\underset{\sim}{A})$即F（$\underset{\sim}{A}$）的核称为$\underset{\sim}{A}$的一等模糊域。$F_1\downarrow(\underset{\sim}{A})$叫做$\underset{\sim}{A}$的一等清晰域，可以根据各种不同的应用要求，规定一个模糊集合的各种等级的模糊域和清晰域。

本文曾蒙阎家杰副教授审阅，提出了许多宝贵意见，并建议使用"集合模糊度"这一名词，特在此表示感谢！

## 参考文献


[1] 汪培庄 模糊集合论及其应用 上海科技出版社

[2] 贺仲雄 模糊数学及其应用

[3] 贺仲雄. 邵正强 关于模糊性度量与贴近度的一些注记 "模糊数学"86.9.第三期


# Research into Fuzzy Measure of the Fuzzy set

Meng Tingiang Qi Chungeng

( Dept. of Math. and Mech. )

**AbStract** This paper indicates the limit of the commun Fuzzy measure, we difine the Fuzzy measure of the element u for the Fuzzy set $\underset{\sim}{A}$, set's Fuzzy measure、mean Fuzzy measure、weighted mean Fuzzy measure. Fuzzy measure square devialion of the A And we difine λ—cut sets: $F_\lambda\uparrow(\underset{\sim}{A})$、$F_\lambda\downarrow(\underset{\sim}{A})$ of the F($\underset{\sim}{A}$) to explain the difrent Fuzzy fieild and the clear fieild of the $\underset{\sim}{A}$.

**key words:** Fuzzy set, Fuzzy measure, set's Fuzzy measure, mathematical theories