第10卷 第3期 郑州工学院学报 VOL.10 NO.3
1989年9月 J. ZhengZhou Inst. of Technol. sept. 1989

一类李雅普诺夫函数的机器构造

陈永华 王国中

（数力系）

提 要：本文讨论使用计算机构造系统$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=0$的各种等价系统的A、M巴尔巴辛V函数的构造形式。给出了三阶系统的若干具体结果，指出了文献[1]中手工运算出现的三个错误。

关键词：李雅普诺夫函数，计算机应用、函数构造法

微分方程的运动稳定性理论在力学、电子学、自动控制、系统工程等许多学科中都有着广泛的应用。研究系统是否稳定的一种重要方法是根据方程的结构和所表示的实际意义构造一个LYAPUNOV函数，通过讨论该函数的性质达到其判定目的。

对不同的系统没有一个通用的构造V函数方法，人们在对各种情况的讨论中，建立了一系列有效的方法，如能量积分法、变量分离法、分解子系统法等。A、M巴尔巴辛对线性系统$dx/dt=AX$，通过事先给出$dv/dt=X^TWX$得到了一个构造V函数的行列式表示公式。人们在研究阶数较低的系统中，通过对展开V函数结构的讨论，应用类比的方法得到了不少相关非线性系统稳定的很好的充分条件。但是在四阶及更高阶的系统中人们还没有得到漂亮的结果。其中原因之一就是对n阶线性系统构造一个V函数要计算一个$n(n+1)/2+1$阶字符行列式，这是手工运算难以胜任的，因而限制了对高阶系统进行更充分的讨论。

高速计算机的出现和人工智能技术在数学公式推导中的应用，弥补了手工几乎不能进行的大量、复杂的机械运算和公式推导的不足，为这方面的研究，提供了强有力的工具。我们设计的这个微分方程公式推导系统，只要输入有关的微分方程和你予赋的dv/dt值，系统就能迅速、直接、正确给出你所需要的A、M巴尔巴辛v函数展开式，并可指出一些基本的非线性系统的可类比条件。对于$dv/dt=X^TWX$中的W，过去人们为了减少运算量，而只取一些极特殊的情况，而利用该推导系统，为找到更好的W提供了可能。

本文限于讨论最常用的系统$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=0$的各种等价系统。对于一般的线性系统同样适用。

1、数学原理与机器构造函数的算法

系统：$$\frac{dX}{dt}=AX \qquad (1\cdot1)$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

设 $v = X^T BX$ (1.2)

则 $\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dX}{dt}\right)^T BX + X^T B\frac{dX}{dt} = X^T(A^T B + BA)X$

若给出w使$\frac{dv}{dt} = X^T WX$ (1.3)

则可由矩阵方程

$$A^T B + BA = w \tag{1.4}$$

解出B。这里B、w是n阶矩阵。

巴尔巴辛通过展开方程（1、4）给出了一个v函数的行列式表示式。

$$v = \frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & \cdots 2x_i x_k & \cdots x_n^2 \\ w11 & \cdots p(11, 11)\cdots & p(ik, 11)\cdots & p(nn, 11) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2w_{jl} & p(11, jl)\cdots & p(ik, jl)\cdots & p(nn, jl) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{nn} & p(11, nn)\cdots & p(ik, nn)\cdots & p(nn, nn) \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

$$这里\Delta = \begin{vmatrix} p(11, 11)\cdots & p(ik, 11)\cdots & p(nn, 11) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p(11, jl)\cdots & p(ik, jl)\cdots & p(nn, jl) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p(11, nn)\cdots & p(ik, nn)\cdots & p(nn, nn) \end{vmatrix}$$

$$p(ik, jl) = \begin{cases} 0 & i\neq j, \quad l\neq j,\ k\neq l \\ a_k l & i = j, \quad k\neq l \\ a_{ii} + a_{kk} & i = j, \quad k = l, \quad i\neq l \\ a_{ii} & i = j = k = l \end{cases} \tag{1.6}$$

（1·5）式中第一行排列为0，$x^2{}_1$，$2x_1x_2$，$\cdots 2x_1x_n$，$x^2{}_2$，$2x_2x_3\cdots$，$x^2{}_3$，$\cdots x_i^2$，$2x_ix_{i+1}\cdots 2x_ix_n$，$\cdots x^2{}_{n-1}$，$2x_{n-1}x_n$，$x_n{}^2$有$n(n+1)/2+1$个元素，故行列式为$n(n+1)/2+1$阶的。

本系统由四大部分组成。

（1）输入部分：在该部分，只要用户输入微分方程的等价形式，系统可对该方程组 依次进行扫描，采集到相应的系数，并用便于机器进行高效处理的结构给予表示。

（2）行列式结构的建立：这里对行列式的第x行，第y列元素b（x，y），通过对x， y分解得到相应的ik，jl。x与i，k的关系为：

$$x = ni - \frac{i(i-1)}{2} - n + k + 1\ (k\leq n) \tag{1.7}$$

y与i，l的关系与（1,7）类同。

故$x\leqslant ni-\frac{i(i-1)}{2}+1$

$$\begin{cases} i=\left[\dfrac{2n+1-\sqrt{(2n+1)^2-8(x-1)}}{2}\right]+1 \\ k=x+\dfrac{1}{2}i^2-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)i+n-1 \end{cases} \tag{1.8}$$

建立了$b(x,y)$与$p(ik,jl)$的对应关系后，利用公式[1·6]可将微分方程的系数由机器自动赋给行列式的元素，从而建立了整个字符行列式的结构形式。

整个过程为：

$$\boxed{b(x,y)}\ \underset{(1\cdot7)}{\overset{(1\cdot8)}{\rightleftarrows}}\ \boxed{p(ik,jl)}\ \xleftarrow{(1\cdot6)}\ \boxed{a(m,n)}$$

（3）产生v函数的展开形式：这是本系统的核心部分，展开表达v函数的行列式，所采用的算法是异于数值行列式计算方法的。它的依据是从定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\quad\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i1,\cdots in}(-1)^{\tau(i1,i2,\cdots,in)}a_{1i1}a_{2i2}\cdots a_{nin} \tag{1.9}$$

出发，采用人工智能的深度优先搜索技术，求得所有项组合i_1，i_2，…i_n，每个i_1，i_2，…i_n是1，2，…n，关于（1·9）的一个可用项排列。定义（1·9）中共有n！项，当n增大时，有可能产生组合爆炸，针对本文研究的系统中零项相当多的情况，设计时考虑了如下的剪枝技术。

当$a_{iji}=0$时剪去该枝，ji向下搜索。这样可有效地避免了搜索的盲目性，机器运行五阶以内系统证明，它满足人们对时间的要求。

在本系统中，表示v函数的数据结构是可以随机涨落的动态栈，为节省存贮空间，同类项的合并，v函数的建立和转译输出等方面提供了很强的灵活性和较高的效率。

（4）在动态栈中存贮的结果是行列式各有关项的系数和指数，是一些整数值，输出部分将这些动态栈的结果，按直观的函数形式输出。

2、三阶系统的一些具体结果

对系统$dx_i/dt=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3\ (i=1,2,3)$　　(2.1)

由巴尔巴辛公式知：

$$v=\frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & x_2^2 & 2x_2x_3 & x_3^2 \\ w_{11} & a_{11} & a_{21} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 2w_{12} & a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ 2w_{13} & a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & 0 & a_{21} & a_{31} \\ w_{22} & 0 & a_{12} & 0 & a_{22} & a_{32} & 0 \\ 2w_{23} & 0 & a_{13} & a_{12} & a_{23} & a_{22}+a_{33} & a_{32} \\ w_{33} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

我们将系统：

$$d^3x/dt^3+a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=0 \qquad (2.3)$$

分解为八种不同的等价系统，分别取dv／dt为

$$\frac{-\Delta}{c}x^2,\ \frac{-\Delta}{c}y^2,\ \frac{-\Delta}{c}z^2$$

在机器上运行后，相应得到了二十四个不同的v函数，除包含了文献〔1〕中的十八个v函数外还得到了新的v函数。

在我们检查这些v函数结构时，发现了文献〔1〕中存在如下三个错误：

将〔2·3〕化为等价系统：

$$\begin{cases} dx/dt=-ax+z \\ dy/dt=-cx \\ dz/dt=-bx+y \end{cases} \qquad (2.4)$$

取 $2w=-(ab-c)y^2$

$$v=\frac{1}{2}c^2x^2-acxy+\frac{1}{2}a^2y^2+\frac{1}{2}ab^2y^2/c-(ab-c)yz+\frac{1}{2}acz^2$$

原文中（ab－c）yz项的符号为正。

将〔2·3〕化为等价系统。

$$\begin{cases} dx/dt=-ax+y \\ dy/dt=-bx-cz \\ dz/dt=x \end{cases} \quad 这里 \begin{cases} x=\ddot{x} \\ y=-cx-b\dot{x} \\ z=\dot{x} \end{cases} \qquad (2.5)$$

取$2w=-(ab-c)y^2$

$$v=\frac{1}{2}b^2x^2+\frac{1}{2}acx^2-abxy+cxy+a^2cxz+bxz+\frac{1}{2}a^2y^2+\frac{1}{2}by^2+\frac{1}{2}a^3cz^2+\frac{1}{2}c^2z^2$$

原文中的$1/2bcy^2$项应为$1/2by^2$

取 $2w=-(ab-c)z^2$

$$v=\frac{1}{2}x^2+axz+\frac{1}{2}ay^2/c+abyz/c-yz+\frac{1}{2}ab^2z^2/c+\frac{1}{2}a^2z^2-\frac{1}{2}bz^2$$

原文除缺少－yz项外，还有二处系数错误。

3、进一步的考虑

正如前言所述，由于手工运算的局限性，人们对w_{ij}的取法因其特殊而不能满足类比更高阶系统的需要。而本系统的出现，为有经验的数学工作者弄清高阶系统v函数结构，提供了一个有效的工具。

同样，在对相应的非线性系统进行类比推导出较好系统稳定条件(如广义霍尔维茨条件)的过程中，对v函数结构形式的研究和变换具有很强的灵活性和专家的经验性。因此，本机器推导系统可考虑进行更进一步的改进，在原来的基础上，加入专家们已经成熟的类比经验。利用专家知识，对原v函数结构进行有效的变换，使机器自动产生常微分方程稳定的较好结果，使系统完全智能化。从而搞清楚在专家操作下，更高阶系统的稳定条件。

参　考　文　献

[1] 王联，王慕秋，一类三阶非线性系统李雅普诺夫函数构造之分析，应用数学学报3(1983)，309—323.

[2] 尼尔逊著，石纯一等译，人工智能原理，科学出版社，1983。

[3] 秦元勋，王慕秋，王联，运动稳定性理论及应用。科学版出社，1982。

Construction of LYAPUNOV FUNCTLON Using Comnputer

cheng yonghua　　　wang Guozhong

(Dept.of Math. and Mech.)

Abstract: This paper constructs LYAPONOV FONCTLON of systems which is equivalent to $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=0$, further more, we give some results of Third—order system and point out three errors appeared in[1]

Keywords: Lyapunov funcfions, computer applications, construction theory of functions。