第10卷 第2期 郑州工学院学报 VOL.10 NO.2
1989年 6 月 J.ZhengZhou Inst. of Technol. June 1989

矩阵在层次分析法中的应用

刘晨光

（水利系）

系统工程的发展，使我们观察、分析和解决问题从单维的片面思维方法走向多维的全面系统方法，也就是说在解决任何一个问题时，不再是仅仅从一个方面出发，寻求问题的最优，而是从系统的观点出发，全方位地、联系地看待事物，寻求问题的综合最优。系统工程的理论、思想和方法对于解决多复杂因素的技术、经济和社会问题将开辟一个新的道路，但是，由于这些问题因素复杂，变量众多，运算困难，给系统工程的应用和发展带来了很大困难，因此，计算方法的改进尤其是变量众多的高维复杂运算的改进，已经成为系统工程学者所面临的一个棘手问题。随着计算机的诞生，许多新的计算方法也应运而生。矩阵则在其间占据着其特有的作用，矩阵和计算机的结合，无疑将给系统工程一个巨大的推动作用。它将成为解决各种复杂的高维运算的有力工具。下面我们就简略谈谈矩阵在层次分析法中的应用。

层次分析法（Analytical Hierarchy Process简称AHP）最早是由美国运筹学家T.L.Saaty提出，是一种能处理具有复杂因素在内的技术、经济和社会问题的有效方法。（往往是多目标属性决策问题Multlple Attribute Decision Making简称MADM问题），这些问题往往很难用定量的模型或模拟来分析，因为其中所含定性因素很多，而且需要考虑决策者的心理因素、知识经验和决策水平等，而层次分析法则能通过建立所谓判断矩阵的过程，逐步分层地将众多的复杂因素和决策者的个人因素综合起来，进行逻辑思维，然后用定量的形式表示出来，从而使决策者能对复杂问题做到“心中有数”

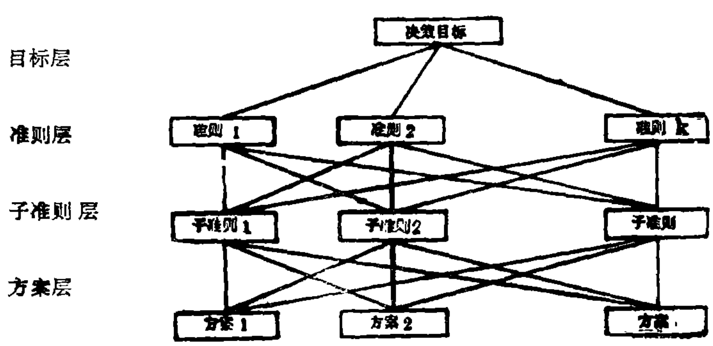

图1、递阶层次结构示意图

运用AHP解决问题，大体上可以分为四个步骤：1、建立问题的递阶层次结构；2、构造两两比较判断矩阵；3、由判断矩阵计算被比较元素的组合权重。

下面分述如下：

收到日期：1988.09.25.

1　建立递阶层次结构

一个典型的递阶层次结构可用图 1表示

从上图所示递阶层次结构示意图中，知道复杂大系统多目标决策问题所涉及变量众多、因素复杂，而且定性、定量问题混杂，量纲不统一，各层次的关系（权重）不明确，用古典的计算方法很难解决、甚至不能解决。因此，人们引入了矩阵，进而利用计算机来解决多目标属性决策问题。

2　构造两两比较判断矩阵

AHP法中的最主要部分就是两两比较两个元素（或目标属性，或方案属性值等）后给出所谓判断矩阵、在递阶层次结构建立以后，上下层次之间元素的隶属关系就被确定了。假定上一层次的元素C_K作为准则，对下一层次的元素A_1，A_2，…，A_n有支配关系，我们的目的是在准则C_K之下按它们相对重要性赋予A_1，A_2，…，A_n相应的权重（可依此进行方案排序）。对于大多数社会经济问题，特别是对于人的判断起重要作用的问题，直接得到这些元素的权重并不容易，往往需要通过适当的方法来导出它们的权重。我们采取的方法是召集有关专家、决策者及决策分析者通过两两比较的方法建立判断矩阵。下面给出判断矩阵的给出原理及标度说明。

假设有某个物体B，若其有n个部分：b_1，b_2，…，b_n，则b_i表示第i部分在B中的地位（份量，作用，重要性）。而b_i/b_j则表示第i部分相对于整体B而言比第j部分重要的倍数，若将这个倍数用a_{ij}表示，则可得如下矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1/b_1 & b_1/b_2 & \cdots & b_1/b_n \\ b_2/b_1 & b_2/b_2 & \cdots & b_2/b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n/b_1 & b_n/b_2 & \cdots & b_n/b_n \end{pmatrix}$$

其中矩阵A中的元素a_{ij}满足如下性质

（1）$a_{ij}>0$　　（2）

（2）$a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}}$（互反性）　　（3）

（3）$a_{ij}=a_{ik}/a_{jk}$（一致性）　　（4）

（4）$a_{ii}=1$　　（5）

然而人们往往不知道物体B中几个部分的地位(或份量)而可以通过两两比较各个部分，给出其倍数关系a_{ij}来，这样我们就可以通过式（1)来求出B物体中各个部分的份量，具体求解为：

用向量$B=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)^T$右乘等式两边得：

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} b_1/b_1 & b_1/b_2 & \cdots & b_1/b_n \\ b_2/b_1 & b_2/b_2 & \cdots & b_2/b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n/b_1 & b_n/b_2 & \cdots & b_n/b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} nb_1 \\ nb_2 \\ \vdots \\ nb_n \end{pmatrix}=nB$$

即$A \cdot B = nB$　　（6）

（6）式中A为已知，n为已知，可通过解（6）式求得B，且有唯一解

但必须注意：（4）式所陈述的一致性特点，并不是随时都能够满足的，这是因为客观事物的复杂性以及人们对事物认识的模糊性和多样性所决定的，因而所给出的判断矩阵不可能完全一致。即（4）式难以满足，这样（6）式的解也就不唯一，这种情况怎样解决呢？这就是所谓一致性检验问题，将在下面详细说明，下面我们先谈谈矩阵A中的元素aij是怎样给出的。

对于定性属性的描述，saaty提出了所谓saaty标度来衡量两部分之间的倍数关系。若设第i部分与第j部分比较（两两比较），可以得到如表一左边的定性描述结果（因为定量结果很难给出），则可用右边的saaty标度予以量化，这样就可给出矩阵A中所有的元素，这个工作通常是由决策分析者汇同有关专家，决策者共同完成的，由于在比较过程中加入了决策者的判断因素，因而就称A矩阵为所谓的判断矩阵。

表1　　Saaty标度说明

第i部分(Bi)与第j部分(gB)比较的定性结果	aij的saaty标度	意　义
Bi与Bj同样重要	1	bi＝bj
Bi比Bj稍微重要	3	bg＝3bj
Bi比Bj相当重要	5	bi＝5bj
Bi比Bj强烈重要	7	bi＝7bj
Bi比Bj极端重要	9	bi＝9bj
Bi比Bj不重要性在上述描述之间	2，或4，或6，或8	
Bi比Bj不重要的上述描述	相应上述数的倒数	

由于性质（2）、（4）对于n阶判断矩阵仅需对其上（下）三角元素共$\frac{n(n-1)}{2}$个给出判断即可

3　由判断矩阵计算被比较元素的相对权重，并进行一致性检验

由于（4）式所描述的一致性条件难以满足，因此（6）式的解也就不唯一，也即A的最大特征根$\lambda max \neq n$，这样求解（6）式就应转变为求解式（7），得出最大特征根所对应的特征向量　$B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$

$$A \cdot B = \lambda max B \tag{7}$$

这里又涉及到三个问题，一是特征向量的计算，二是计算结果的可接受性（也即判断矩阵是否具有满意的一致性要求）三是不一致时判断矩阵的调整。

3.1 最大特征根及其对应特征向量的计算。

对于最大特征根及其对应特征向量的计算一般采用所谓幂法，该法的步骤如下：

3.1.1　任取与判断矩阵A同阶的规范化初始向量$B^0 = (b_1{}^0, b_2{}^0, \cdots, b_n{}^0)^T$

3.1.2　对于$k=0,1,2,\cdots$计算$\bar{B}^{k+1}=A\bar{B}^{k}$

3.1.3　令$\beta=\sum_{i=1}^{n}b_i^{k+1}$　计算$B^{k+1}=\frac{1}{\beta}\bar{B}^{k+1}$，$k=0,1,2,\cdots$

3.1.4　对于预先给定的精度ε，当$|b_i^{k+1}-b_i^{k}|<\varepsilon$　$\forall i$时

则$B=B^{k+1}$为所求特征向量，这时最大特征根λmax为：

$$\lambda max=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{k+1}}{nb_i^{k}} \tag{8}$$

上述计算过程需要利用计算机才能有效地完成，如果不借助计算机，则可运用如下近似计算公式。

①列标准化后的平均值法（列和法）

$$b_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}a_{kj}}\right) \tag{9}$$

②行标准化后的平均值法（行和法）

$$b_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} \tag{10}$$

③几何平均法

$$b_i=\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}\Big/\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_{kj}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{11}$$

三种近似法中以几何平均法最为精确，而当精确性要求不高时，则以列和法的估计值为优。

用近似公式计算出的近似向量B对应的最大特征根λmax的计算如下：

$B'=(b'_1,b'_2,\cdots,b'_n)^T=A\cdot B$

$$\lambda max=\sum_{i=1}^{n}\frac{b'_i}{nb_i} \tag{12}$$

3．2　一致性检验问题

判断矩阵一致性的不能满足，就会导致$\lambda max>n$的情形发生，那么这种不一致性是否能够容忍呢？这就是所谓一致性检验问题。

为了检验判断矩阵的一致性，需计算它的一致性指标CI

$$CI=\frac{\lambda max-n}{n-1} \tag{13}$$

显然，当判断矩阵具有完全一致性时，$\lambda max=n$，$CI=o$

当CI愈大，即$\lambda max-n$愈大时，矩阵的一致性愈差

另外，判断矩阵的一致性还具有随机性，这种随机一致性可用所谓平均随机一致性指标

RI表示，其值的大小只与矩阵维数大小有关，下面是 1～ 10维矩阵的平均随机一致性指标的取值：

维数n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

检验判断矩阵的一致性是用所谓的相对一致性指标CR：

$$CR = CI / RI$$

一般而言，CR愈小，判断矩阵的完全一致性愈好。可以认为当$CR \leq 0.1$时，判断矩阵基本符合完全一致性条件，而当$CR > 0.1$时，一般认为所给出的判断矩阵是不能令人满意的，需进行调整修正，直到检验通过为止。

3．3 不一致的判断矩阵的调整修正。

目前，调整修正判断矩阵的方法，还没有固定的通用模式，主要是借助于经验和技巧，一般来说可采用如下步骤进行。

3．3．1 把判断矩阵中的第n列系数归 1．即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}/a_{1n} & a_{12}/a_{1n} & \cdots & a_{1n-1}/a_{1n}, & 1 \\ a_{21}/a_{2n} & a_{22}/a_{2n} & \cdots & a_{2n-1}/a_{2n}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \cdots & a_{nn-1}/a_{nn}, & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.2 观察变化后的各纵列中数据是否相近，如果某列中有些数据互不相近(即 差距过大)，则可重新考察判断矩阵的给出，即考虑差距大列中的元素给值。一般从物理意义上进行推敲，给以适当修正，使之相近。

3.3.3 如果各列都在某一行上出现偏大或偏小的情况，则可修正该行最后一列元素的给值。

4 计算各层元素的组合权重及总的判断一致性检验

为了得到递阶层次结构中每一层次中所有元素相对于总目标的相对权重。需要把第三步的计算结果进行适当的组合，并进行总的判断一致性检验。这一步骤是由上而下逐层进行的。最终计算结果得出最低层次元素，即决策方案优先顺序的相对权重和整个递阶层次模型的判断一致性检验。

假定已经计算出第k— 1层元素相对于总目标的组合排序权重向量 $a^{k-1} = (a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \cdots, a_{J_m}^{k-1})^T$，第k层在第k－1层第j个元素作为准则下元素的排序权向量为 $b_j^k = (b^k_{1j}, b^k_{2j}, \cdots, b^k_{nj})^T$，其中不受支配(即与k－1层第j个元素无关)的元素权重为零。令 $B^k = (b_1^k, b_2^k, \cdots, b_m^k)$，则第k层n个元素相对于总目标的组合排序权重向量由下式给出。

$$a^k = B^k a^{k-1} \tag{15}$$

更一般地，有排序的组合权重公式

$$a^k = B^k \cdots B^3 a^2 \tag{16}$$

式中a^2为第二层次元素的排序向量$3 \leq k \leq h$ h为层次数。

对于递阶层次组合判断的一致性检验，需要类似地逐层计算CI。若分别得到了第 k－ 1

层次的计算结果CI_{k-1}，RI_{k-1}和CR_{k-1} 则第k层的相应指标为：

$$CI_k = (CI^1{}_k, \cdots, CI_k{}^m)a^{k-1} \tag{17}$$

$$RI_k = (RI_k{}^1 \cdots, RI_k{}^m)a^{k-1} \tag{18}$$

$$CR_k = CR_{k-1} + \frac{CI_k}{RI_k} \tag{19}$$

这里$CI_k{}^i$和$RI_k{}^i$分别为在k－1层第i个准则下判断矩阵的一致性指标和平均随机一致性指标，当$CR_k < 0.10$时，则认为递阶层次在k层水平上整个判断有满意的一致性。

结语：AHP的最终结果是得到相对于总的目标各决策方案的优先顺序权重，并给出这一组合排序权重所依据的整个递阶层次结构所有判断的总的一致性指标，据此可以做出决策。在此过程中，判断矩阵使定性问题得已定量化，并实现了人机对话，使高维运算的迅速，便利成为可能。

〔实例分析〕：某博士生毕业后，有三个单位想聘用。且保证满足住房要求，该博士生提出六条目标属性，试用层次分析法帮助其选择工作单位。

1、建立层次结构：如图2所示

2、构造判断矩阵：对于各层上的元素可以依次相对于与之有关的上一层元素进行两两比较，从而建立一系列的判断矩阵。该博士生对图2中的第二层各目标属性相对于上一层的总目标J，可建立如表二所示的判断矩阵。对于第三层上各方案（工作单位）依次相对于上一层的六个目标属性，该博士给出如表三所示的六个判断矩阵。

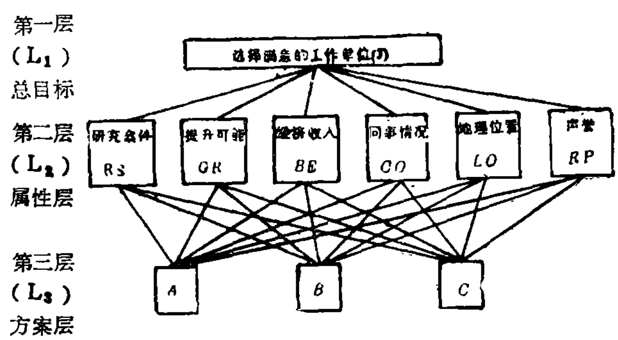

图2 递阶层次结构

表2

J	RS	GR	BE	CO	LO	RP
RS	1	1	1	4	1	1/2
GR	1	1	2	4	1	1/2
BE	1	1/2	1	5	3	1/2
CO	1/4	1/4	1/5	1	1/3	1/3
LO	1	1	1/3	3	1	1
RP	2	2	2	3	1	1

RS	A	B	C
A	1	1/4	1/2
B	4	1	3
C	2	1/3	1

GR	A	B	C
A	1	1/4	1/5
B	4	1	1/2
C	5	2	1

BE	A	B	C
A	1	3	1/3
B	1/3	1	1
C	3	1	1

CO	A	B	C
A	1	1/3	5
B	3	1	7
C	1/5	1/7	1

LO	A	B	C
A	1	1	7
B	1	1	7
C	1/7	1/7	1

RP	A	B	C
A	1	7	9
B	1/7	1	5
C	1/9	1/5	1

表3

3、各判断阵矩对应的元素排序（权重计算）及其一致性检验。

对以上各判断矩阵，在计算机上用幂法求解：

对于第二层的各元素，经过计算可得如下权重向量：

$W_2=(0.16, 0.19, 0.19, 0.05, 0.12, 0.30)^T$

对于第三层有：

$$W_3=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{cccccc} RS & GR & BE & CO & LO & RP \\ \begin{pmatrix}0.14\\0.63\\0.24\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0.10\\0.33\\0.57\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0.32\\0.22\\0.46\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0.28\\0.65\\0.07\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0.47\\0.47\\0.07\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0.77\\0.17\\0.05\end{pmatrix}\end{array}$$

然后检验各判断矩阵的一致性：对L_1-L_2的判断矩阵有

$$\lambda\max=6.35,\quad CI=\frac{6.35-6}{5}=0.07,\quad CR=\frac{0.07}{1.24}=0.056$$

满足一致性要求；对于L_2-L_3的判断矩阵有：

	RS	GR	BE	CO	LO	RP
λmax	3.02	3.02	3.56	3.05	3.0	3.21
CI	0.01	0.01	0.28	0.025	0	0.105
CR	0.017	0.017	0.48	0.043	0	0.181

基本上满足一致性要求。

4、总层次排序及一致性检验。

利用式（16）计算得：

$$W = W_3 W_2 = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 0.14 & 0.10 & 0.32 & 0.28 & 0.47 & 0.77 \\ 0.63 & 0.33 & 0.22 & 0.65 & 0.47 & 0.17 \\ 0.24 & 0.57 & 0.46 & 0.07 & 0.07 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.19 \\ 0.19 \\ 0.05 \\ 0.12 \\ 0.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.34 \\ 0.26 \end{pmatrix}$$

对于图2所示的三阶层次结构，其一致性检验如下：

设第三层相对于第二层的各判断矩阵的一致性指标向量为：

$CI = (CI_1, CI_2 \cdots, CI_6) = (0.01, 0.01, 0.28, 0.25, 0, 0.105)$

$RI = (RI_1, RI_2, \cdots, RI_6) = (0.58, 0.58, 0.58, 0.58, 0.58)$

则总层次的一致性指标CI和RI为：

$$CI = \overline{CI} \cdot W_2 = \sum_{j-1}^{6} CI_j \cdot W_j^2 = 0.089$$

$$RI = RI \cdot W_2 = \sum_{j-1}^{6} RI_j \cdot W_j^2 = 0.58$$

这样随机一致性判别指标为：

$CR = CI / RI = 0.089 / 0.58 = 0.153$

总层次中的所有判断矩阵勉强满足一致性要求

5、结论分析

根据最终的W就可以对方案进行排序。如上例，就可以为三个工作单位中A单位综合情况最好，其次是B，再次是C，因此就可考虑进A的单位工作。

参 考 文 献

〔1〕 英.S.巴尼特著　刘则刚，潘鼎坤译《科技人员用的矩阵方法》　陕西科技出版社

〔2〕 许树泊著《实用决策方法—层次分析法原理》　天津大学出版社。

〔3〕 左军《多目标决策分析》浙江大学

〔4〕 丁学仁，蔡高厅著《工程中的矩阵理论》天津大学出版社。