

# 斜放四角锥平板网架内力计算 ——修正假想弯矩法

许琪楼

(土建系)

**提 要:** 本文提出斜放四角锥平板网架内力计算的修正假想弯矩法。与假想弯矩法相比,该法考虑了四角锥单元上弦节点扭转剪力的影响,更合理地反映了斜放四角锥网架的受力特点,是一种计算精度较高的简化算法。

**关键词:** 网架, 斜放四角锥

斜放四角锥网架上弦为正交斜放,下弦为正交正放,受压上弦杆短,受拉下弦杆长,受力合理,在工程设计中应用广泛。网架内力计算有精确法和简化法二类,前者为空间桁架位移法,它适用于各种类型的网架结构,而斜放四角锥网架的简化计算通常使用假想弯矩法。

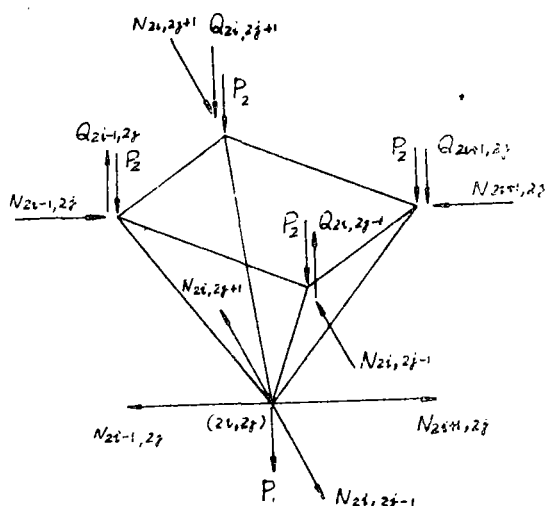


图 1

假想弯矩法的计算模式是分析图 1 所示的四角锥单元体节点力,并将其平衡方程转换成下弦杆节点处假想弯矩的差分表达式。假想弯矩法的计算结果与精确法比较,前者求得每个四角锥单元四根上弦杆内力是相等的,且在跨中最大,并向支座方向逐渐减小,而后者计算的四根上弦杆内力是不等的,上弦内力最大值不在跨中,而向角部偏移。对于下弦杆,前者计算的长跨向和短跨向最大跨中拉力是相等的,而精确法计算结果是长跨向下弦杆内力偏大。对于斜腹杆二种方法计算的最大内力值及其位置也不相同。内力相对误差为:下弦杆和腹杆在 20% 以内,跨中上弦杆可高达 50% 以上,但由于假想弯矩法内力值偏大,因此它在工程设计中仍是可以使用。

假想弯矩法计算简便,但杆件内力值与结构实际受力相差较大。这是由于斜放四角锥网架在上下弦二个主要受力平面内,力的传递方向是不一致的,在四角锥体上弦节点上必然

收到日期: 1988. 05. 15.

存在扭转剪力(见图3示)。假想弯矩法忽略扭转剪力的存在导致锥体之间内力分布发生改变, 计算的最大杆力大小及位置与精确法相比有较大差异。

## 1 修正假想弯矩法

修正假想弯矩法就是考虑了四角锥体上弦节点扭转剪力的影响。图2 为单元锥体的座标

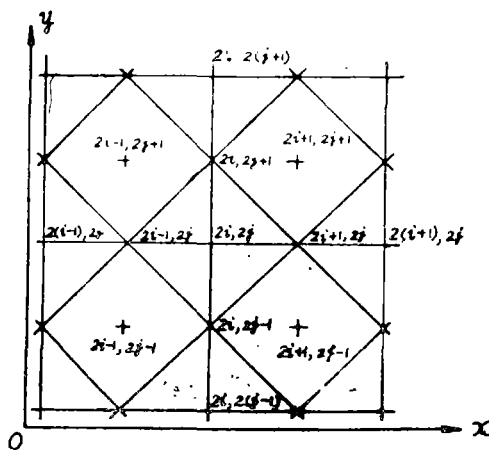


图 2

(采用复座标体系), 节点  $(2i, 2j)$  代表实四角锥, 有弯矩  $M^x$ 、 $M^y$ , 而其四周虚节点  $(2i-1, 2j-1)$ 、 $(2i+1, 2j-1)$ 、 $(2i+1, 2j+1)$ 、 $(2i-1, 2j+1)$  为虚四角锥, 存在扭矩  $M^{xy}$ , 它们均对实四角锥体单元上弦节点作用力产生影响。图3为单元锥体的几何尺寸及力系, 由力的平衡条件有:

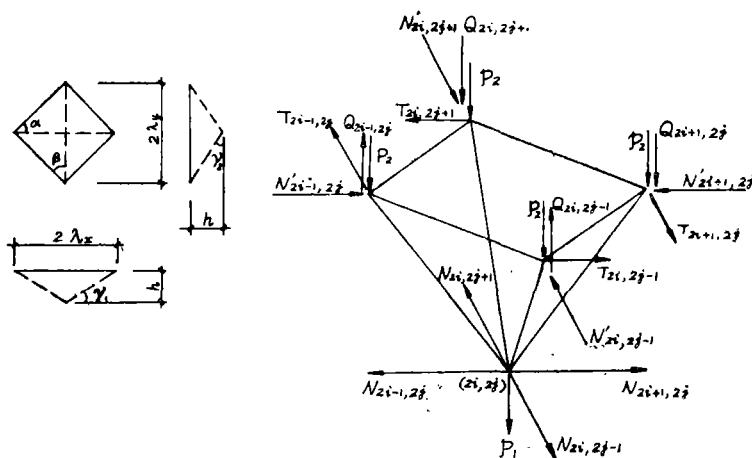


图 3

$$\sum X = 0$$

$$(N_{2i+1, 2j} - N_{2i-1, 2j}) - (N'_{2i+1, 2j} - N'_{2i-1, 2j}) + T_{2i, 2j-1} - T_{2i, 2j+1} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$(N_{2i, 2j+1} - N_{2i, 2j-1}) - (N'_{2i, 2j+1} - N'_{2i, 2j-1}) + T_{2i-1, 2j} - T_{2i+1, 2j} = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = 0$$

$$Q_{2i-1, 2j} + Q_{2i, 2j-1} - Q_{2i+1, 2j} - Q_{2i, 2j+1} - P_1 - 4P_2 = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma M_x = 0$$

$$(N_{2i, 2i+1} - N_{2i, 2i-1}) \frac{h}{2} + (N'_{2i, 2i+1} - N'_{2i, 2i-1}) \frac{h}{2} - (Q_{2i, 2i+1} + Q_{2i, 2i-1})$$

$$\lambda_y - (T_{2i-1, 2i} - T_{2i+1, 2i}) \frac{h}{2} = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$(N_{2i+1, 2i} - N_{2i-1, 2i}) \frac{h}{2} + (N'_{2i+1, 2i} - N'_{2i-1, 2i}) \frac{h}{2} - (Q_{2i+1, 2i} + Q_{2i-1, 2i}) \lambda_x - (T_{2i, 2i-1} - T_{2i, 2i+1}) \frac{h}{2} = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma M_z = 0$$

$$(T_{2i-1, 2i} + T_{2i+1, 2i}) \lambda_x - (T_{2i, 2i-1} + T_{2i, 2i+1}) \lambda_y = 0 \quad (6)$$

参照平板微元内力之间的微分关系, 现设角锥体上弦节点作用力表达式为:

$$\begin{aligned} N'_{2i-1, 2i} &= \frac{M^x_{2i, 2i} + M^x_{2(i-1), 2i}}{2h} \\ N'_{2i+1, 2i} &= \frac{M^x_{2i, 2i} + M^x_{2(i+1), 2i}}{2h} \\ N'_{2i, 2i-1} &= \frac{M^y_{2i, 2i} + M^y_{2i, 2(i-1)}}{2h} \\ N'_{2i, 2i+1} &= \frac{M^y_{2i, 2i} + M^y_{2i, 2(i+1)}}{2h} \\ Q_{2i-1, 2i} &= \frac{M^x_{2i, 2i} - M^x_{2(i-1), 2i}}{2 \lambda_x} + \frac{M^{xy}_{2i-1, 2i+1} - M^{xy}_{2i-1, 2i-1}}{2 \lambda_y} \\ Q_{2i+1, 2i} &= \frac{M^x_{2(i+1), 2i} - M^x_{2i, 2i}}{2 \lambda_x} + \frac{M^{xy}_{2i+1, 2i+1} - M^{xy}_{2i+1, 2i-1}}{2 \lambda_y} \\ Q_{2i, 2i-1} &= \frac{M^y_{2i, 2i} - M^y_{2i, 2(i-1)}}{2 \lambda_y} + \frac{M^{xy}_{2i+1, 2i-1} - M^{xy}_{2i-1, 2i-1}}{2 \lambda_x} \\ Q_{2i, 2i+1} &= \frac{M^y_{2i, 2(i+1)} - M^y_{2i, 2i}}{2 \lambda_y} + \frac{M^{xy}_{2i+1, 2i+1} - M^{xy}_{2i-1, 2i+1}}{2 \lambda_x} \\ T_{2i-1, 2i} &= \frac{M^{xy}_{2i-1, 2i+1} + M^{xy}_{2i-1, 2i-1}}{2h} \\ T_{2i+1, 2i} &= \frac{M^{xy}_{2i+1, 2i+1} + M^{xy}_{2i+1, 2i-1}}{2h} \end{aligned} \quad (7)$$

$$T_{2i,2j-1} = \frac{M_{2i-1,2j-1}^{xy} + M_{2i+1,2j-1}^{xy}}{2h}$$

$$T_{2i,2j+1} = \frac{M_{2i-1,2j+1}^{xy} + M_{2i+1,2j+1}^{xy}}{2h}$$

将(7)式代入(3)式,且当  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$  时有:

$$\begin{aligned} & 2M_{2i,2j}^x - M_{2(i+1),2j}^x + M_{2(i+1),2j+2}^x + 2M_{2i,2j}^y - M_{2i,2(j+1)}^y \\ & - M_{2i,2(j-1)}^y - 2(M_{2i-1,2j-1}^{xy} - M_{2i-1,2j+1}^{xy} - M_{2i+1,2j-1}^{xy} + M_{2i+1,2j+1}^{xy}) \\ & = 2\lambda(P_1 + 4P_2) \end{aligned} \quad (8)$$

将(8)式用差分算子图表示,其形式为:

$$\begin{array}{c} \text{图} \\ \text{图} \end{array} M_{2i,2j}^x + \begin{array}{c} \text{图} \\ \text{图} \end{array} M_{2i,2j}^y + \begin{array}{c} \text{图} \\ \text{图} \end{array} M_{2i,2j}^{xy} = 2\lambda(P_1 + 4P_2) \quad (9)$$

而其余各项平衡条件均可自动满足,说明角锥上弦节点作用力表达式采用(7)式是适宜的。为寻求弯矩  $M^x$  和  $M^y$  的关系,由上弦节点  $(2i-1, 2j)$  的平衡条件有(见图4):

$$N_a \sin \alpha - N_D \sin \alpha + T_{2i-1,2j} = 0 \quad (10)$$

$$N_a \cos \alpha + N_D \cos \alpha = N'_{2i-1,2j} - (P_2 - Q_{2i-1,2j}) \operatorname{ctgr}_1 \quad (11)$$

由上弦节点  $(2i, 2j-1)$  的平衡有:

$$N_b \sin \beta - N_c \sin \beta + T_{2i,2j-1} = 0 \quad (12)$$

$$N_b \cos \beta + N_c \cos \beta = N'_{2i,2j-1} - (P_2 - Q_{2i,2j-1}) \operatorname{ctgr}_2 \quad (13)$$

式中,  $\alpha$ 、 $\beta$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向上弦杆夹角的二分之一;  $r_1$ 、 $r_2$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向斜腹杆与下弦杆夹角。当  $\lambda_x = \lambda_y$  时, 有  $\sin \alpha = \cos \alpha = \sin \beta = \cos \beta$ ,  $\operatorname{ctgr}_1 = \operatorname{ctgr}_2 = \frac{h}{\lambda}$ , 利用内力协调条件 ( $N_a = N_b$ ) 可得:

$$N'_{2i-1,2j} - (P_2 - Q_{2i-1,2j}) \frac{h}{\lambda} - T_{2i-1,2j} = N'_{x2i,2j-1} -$$

$$(P_2 - Q_{2i,2j-1}) \frac{h}{\lambda} - T_{2i,2j-1}$$

将(7)式代入整理后有:

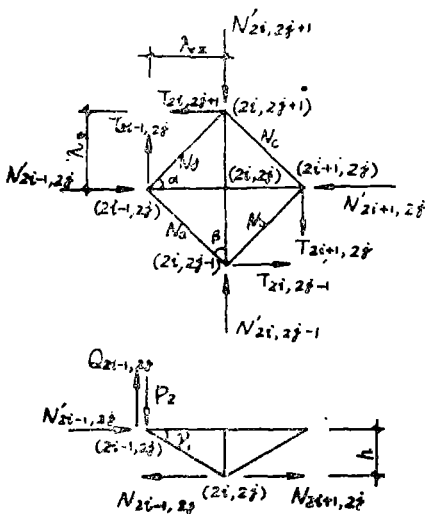


图 4

$$M_{2i,2i}^x = M_{2i,2i}^y \quad (14)$$

(9)式的差分算子图即为:

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} M_{2i,2i} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} M_{2i,2i}^{xy} = 2\lambda(P_1 + 4P_2) \quad (15)$$

用差分法列边缘角锥和角隅角锥的弯矩方程式时(见图5),其界外点的处理随边界条点的不同而异。大多数周边支承的斜放四角锥网架,其边界条件为周边简支,由此可得界内点与相应界外开拓点弯矩的对立关系为:

$$\left. \begin{array}{l} M_{2,2i} = -M_{-2,2i} \\ M_{2i,2} = -M_{2i,-2} \end{array} \right\} \quad (16)$$

边缘角锥弯矩差分算子图为:

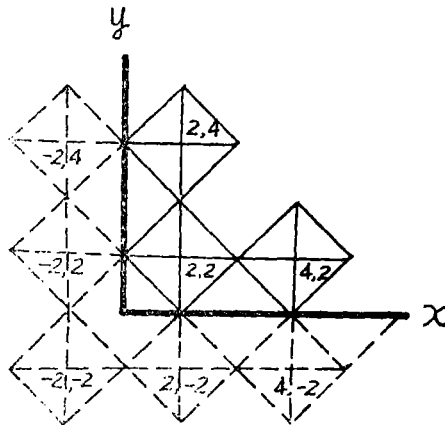


图 5

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} M_{2i,2} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} M_{2i,2}^{xy} = 2\lambda(P_1 + 4P_2) \quad (17)$$

角隅角锥弯矩差分算子图为:

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} M_{2,2} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} M_{2,2}^{xy} = 2\lambda(P_1 + 4P_2) \quad (18)$$

对于边缘角锥和角隅角锥上弦节点作用力要根据(16)式进行调整。

对于斜放四角锥每一个角锥单元均可以建立一个弯矩差分方程式,显然如果每一个虚角锥的扭矩 $M^{xy}$ 为已知,则未知的假想弯矩数目相等于方程式数目,求出每个实角锥体的弯矩后即可利用(7)式计算角锥单元上弦节点的作用力,从而可以求出上弦杆、腹杆、以及下弦杆内力。虚角锥体扭矩 $M^{xy}$ 计算方法如下:

利用板的弯曲理论并采用Navier解可得周边简支矩形板承受均布荷载时单位长度的扭矩计算式:

$$M^{xy} = -\frac{16(1-\gamma)q_0}{\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (19)$$

$$(m, n = 1, 3, 5 \dots)$$

式中:  $a$ 、 $b$ 为 $x$ 向和 $y$ 向板边长,  $q_0$ 为板承受的均布荷载(等于网架上, 下弦平面均布荷载之和),  $\gamma$ 为泊松比。由上式可知: 在 $x=0$ 、 $x=a$ 、 $y=0$ 、 $y=b$ 处, 即在板边和板角点处, 扭矩 $M^{xy}$ 不为零; 在板的对称轴上 $M^{xy}=0$ , 且对称轴二侧相对应的点其扭矩值大小相等, 符号相反。用(19)式计算虚角锥扭矩时 $\gamma=0.5$ , 表示网架受力变形后, 体积保持不变。同时考虑到网架结构是一个格构式的空间桁架, 与实体板的受力有一定差异, 即扭转刚度相对较小为此在计算时引入扭矩折减系数0.5。为了便于制成图表, 应该计算相应 $2\lambda(P_1+4P_2)=1$ 时的

的扭矩值。由于 $(P_1+4P_2)=(2\lambda)^2 q_0^\bullet$ , 现设 $a=K_a(2\lambda)$   $b=K_b(2\lambda)$ ,  $K_{ab}=\frac{a}{b}=K_a/K_b$ ,  $x=K_x(2\lambda)$ ,  $y=K_y(2\lambda)$ , 代入(19)式整理后得相应于 $2\lambda(P_1+4P_2)=1$ 时的扭矩计算式为:

$$M^{xy} = -\frac{4K_a K_b}{\pi^4 (K_{ab})^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{[(\frac{m}{K_{ab}})^2 + n^2]^2} \cos \frac{m\pi K_x}{K_a} \cos \frac{n\pi K_y}{K_b} \quad (20)$$

( $m, n=1, 3, 5, \dots$ )

式中:  $K_a$ 、 $K_b$ 为 $x$ 向和 $y$ 向的网格数,  $K_{ab}$ 为 $x$ 向和 $y$ 向网格数比值;  $K_x$ ,  $K_y$ 为计算点处的坐标值与网格长度 $2\lambda$ 的比值。该式表示的扭矩仅与网架二个方向的网格数有关, 与网架尺寸和荷载无关, 具有通用性。

## 2 计算步骤及算例

周边简支的斜放四角锥网架, 当其网格数目确定后, 即可用(20)式计算各虚角锥点的扭矩系数, 然后对应每个实角锥单元逐个列出其弯矩差分方程。为减少联立方程式数量可以利用网架的对称性: 相应对称轴二侧的虚角锥其扭矩值大小相等, 符号相反; 而相应的实角锥的弯矩值是大小相等且正负号相同。求解联立方程式可得每个实角锥体的弯矩系数, 而角锥体的实际扭矩和弯矩还应乘以 $2\lambda(P_1+4P_2)$ 。进而可计算各杆件内力。

网架杆力计算方法及步骤如下:

### 1、上弦杆及腹杆内力。

利用(7)式计算实角锥体单元上弦节点作用力, 对于边缘角锥及角隅角锥还要用(16)式进行调整, 对称轴上的角锥可利用对称性。因每个上弦节点只有三个未知量, 由节点平衡条件即可计算上弦杆及腹杆内力。

### 2、下弦杆内力

一般角锥体下弦内力有四

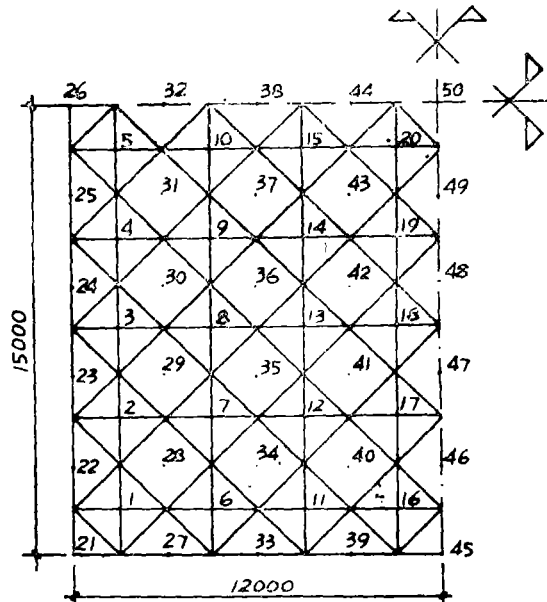


图 6

个未知量,无法直接利用节点平衡计算。但角隅角锥只有两根下弦,边缘角锥有三根下弦,因此下弦杆内力计算要从角隅角锥开始进行,然后依次计算已知1根下弦内力的边缘角锥和已知2根下弦内力的一般角锥。

修正假想弯矩法各角锥体的扭矩系数可以预先制成表格供设计人员使用。

算例1:图6示 $8 \times 10$ 网格的斜放四角锥网架平面及角锥编号。结点1~20代表实四角锥,虚结点21~50代表虚四角锥。网格尺寸 $2\lambda = 3\text{m}$ ,网架高度 $h = 1.8\text{m}$ ,上弦均布荷载 $g_2 = 0.2\text{T/m}^2$ ,下弦均布荷载 $q_1 = 0.05\text{T/m}^2$ 。表1列出修正假想弯矩法各角锥体的弯矩和扭矩系数,图7为其计算的上下弦杆内力值。为比较,图8,9分别列出用假想弯矩法和用空间桁架位移并采用满应力法则计算的杆内力值,可见后二种算法的结果差异较大,而修正假想弯矩法的杆力分布规律基本上与有限元法相同:每个实角锥的四根上弦杆内力是不一致的,上弦杆最大内力不在跨中而向角部偏移,长跨向跨中下弦杆内力要大于短跨向。除角部极少的几个角锥外修正假想弯矩法的内力值与精确法结果的相对误差显著减小,说明修正假想弯矩法是合理的。

表1

弯矩				扭矩					
$M_1$	0.4256	$M_{11}$	0.9672	$M_{21}$	-2.4301	$M_{31}$	-0.6347	$M_{41}$	-0.7071
$M_2$	0.7921	$M_{12}$	2.0896	$M_{22}$	-2.2899	$M_{32}$	0	$M_{42}$	-0.5067
$M_3$	0.9707	$M_{13}$	2.7091	$M_{23}$	-1.8983	$M_{33}$	-1.6680	$M_{43}$	-0.2642
$M_4$	1.0598	$M_{14}$	3.0313	$M_{24}$	-1.3386	$M_{34}$	-1.5770	$M_{44}$	0
$M_5$	1.0975	$M_{15}$	3.1704	$M_{25}$	-0.6871	$M_{35}$	-1.3202	$M_{45}$	0
$M_6$	0.7947	$M_{16}$	1.0365	$M_{26}$	0	$M_{36}$	-0.9410	$M_{46}$	0
$M_7$	1.6480	$M_{17}$	2.2761	$M_{27}$	-2.2189	$M_{37}$	-0.4864	$M_{47}$	0
$M_8$	2.0996	$M_{18}$	2.9737	$M_{28}$	-2.0943	$M_{38}$	0	$M_{48}$	0
$M_9$	2.3337	$M_{19}$	3.3364	$M_{29}$	-1.7456	$M_{39}$	-0.8914	$M_{49}$	0
$M_{10}$	2.4350	$M_{20}$	3.4892	$M_{30}$	-1.2347	$M_{40}$	-0.8428	$M_{50}$	0



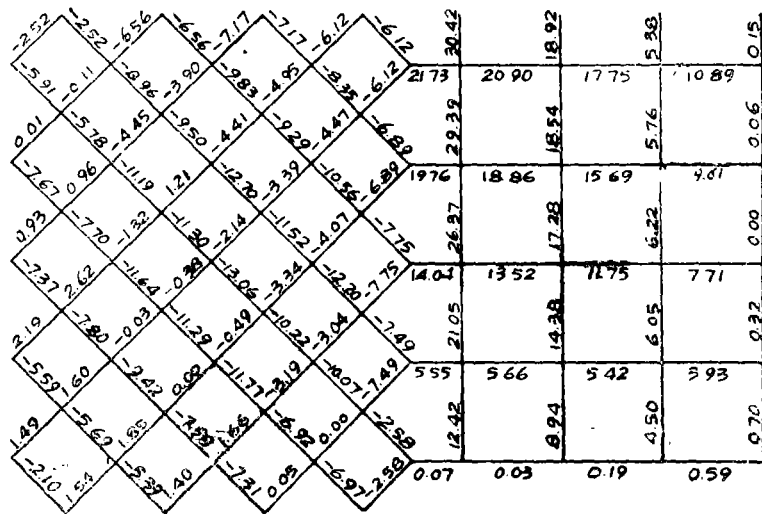


图9(单位: 吨)

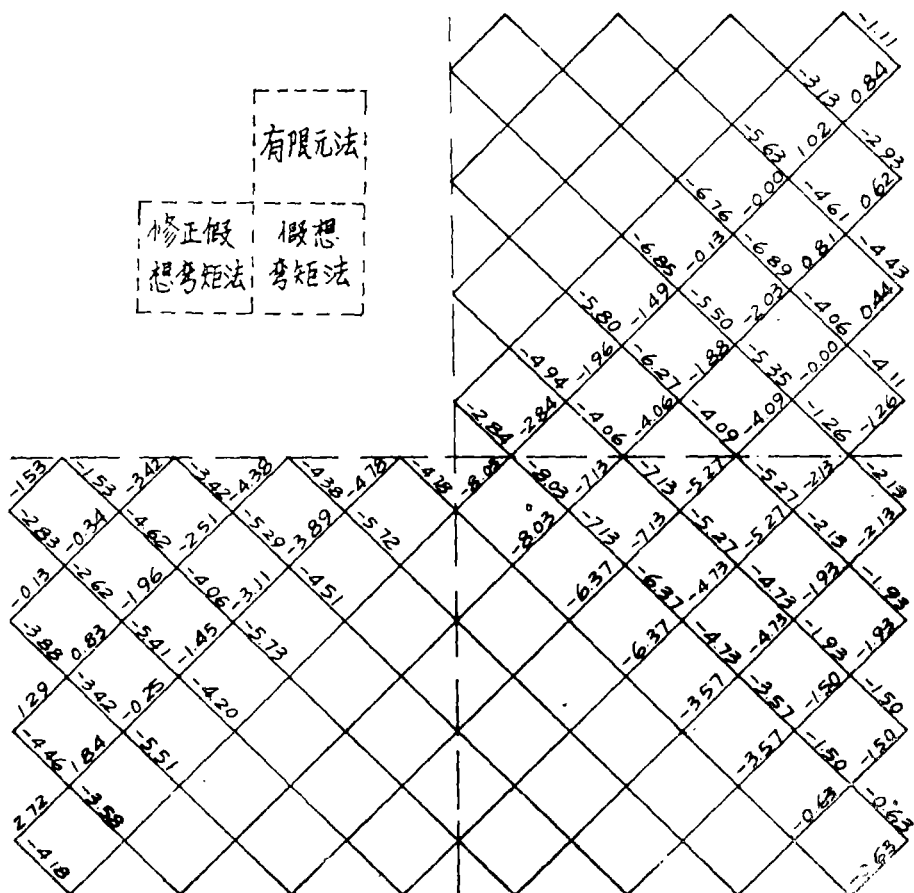


图10(单位: 吨)

算例2:  $8 \times 8$  网格的斜放四角锥网架, 网格尺寸  $2\lambda = 2.5^m$ , 高  $h = 1.25^m$ , 上弦平面均布荷载  $q_2 = 0.2T/m^2$ 。图10分别列出用三种方法计算的上弦杆内力值, 其结果比较得到前述相同的结论。

由此可见: 修正假想弯矩法考虑四角锥单元上弦节点扭转剪力的影响是必要的, 合理的它保存了假想弯矩法计算简便的特点, 同时又使计算误差明显降低, 是一种值得推广的实用简化计算方法。

### 参 考 文 献

- [1] 刘锡良、刘毅轩 平板网架设计 中国建筑工业出版社 1979年
- [2] 范钦珊译 板壳应力 中国建筑工业出版社 1986年
- [3] 许琪楼 周鑑清  $30 \times 36m$  平板网架设计分析比较 郑州工学院学报1985年第一期

## The Modified Imaginery Moment Method for Computing the Internal Forces of Inverted Pyramid Plane Type Space Truss With diagonal-on

Xu Qilou

(Department of civil Engineering and Architecture)

**Abstract:** The modified imaginary moment method for Computing the internal forces of inverted pyramid plane type space truss with diagonal-on is proposed In it account is taken of the effect of torsional shear at the point of uppen chord of a pyramid element compared with the imaginary moment method, and the character of the truss under load is represented reasonably. Therefor this modified method is a simplified method with higher accurate.

**Keywords** space truss, inverted pyramid with diagonal-on