第10卷 第1期 郑州工学院学报 Vol.10 No.1
1989年 2 月 JOURNAL OF ZHENGZHOU INSTITUTE OF TECHNOLOGY February 1989

一类高阶非线性抛物型方程组初边值问题解的渐近性质

杨志坚 赵占才

（郑州工学院数力系），（郑州大学数学系）

提 要：本文讨论了一类非线性抛物型方程组初边值问题解的渐近性质，用能量估计法和Leary-Schauder不动点定理，证明了在一定条件下，问题（I），

$u_t + (-1)^M A(x,t,u,\cdots,u_{x^{M-1}})u_{x^{2M}} = F(x,t,u,\cdots,u_{x^{2M-1}})$，$0<x<1$，$t>0$

$u_{x^k}(0,t) = u_{x^k}(1,t) = 0$，$k=0,1,\cdots,M-1$，$t\geq 0$

$u(x,0)=\varphi(x)$

其中，u，F，φ均为m维向量值函数，A为m阶矩阵）的广义解u(x,t)存在唯一，并且 $\|u(x,t)-v(x)\|_{L_2(0,1)}\to 0$ $(t\to+\infty)$，其中v(x)是问题（II）

$(-1)^M B(x,v,\cdots,v_{x^{M-1}})v_{x^{2M}} = G(x,v,\cdots,v_{x^{2M-1}})$，$0<x<1$

$v_{x^k}(0) = v_{x^k}(1) = 0$，$k=0,1,\cdots,M-1$

的解，这里G，V均为m维向量值函数

关键词：Sobelev内插不等式，Sobelev嵌入定理，Leary-Schauder不动点定理，算子的正定性，Sobelev空间。

1 引言

在物理，化学，生物和力学等领域中，经常出现线性、非线性的抛物型方程和方程组，对这类问题的解及其渐近性质的研究，在理论上和实际上都具有非常重要的意义。文［1］，［2］分别用不同的方法对一类非线性抛物型方程组的初边值问题：

$$u_t = (-1)^{M+1} A(x,t,u,\cdots,u_{x^{M-1}})u_{x^{2M}} + F(x,t,u,\cdots,u_{x^{2M-1}})$$

$$u_{x^k}(0,t) = u_{x^k}(l,t) = 0 \qquad k=0,1,\cdots,M-1,\ t\geq 0$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad 0\leq x\leq l$$

在矩形域$Q_T=\{0\leq x\leq l,\ 0\leq t\leq T\}$上的广义解$u\in H^{(2M,1)}(Q_T)$的存在性和唯一性作了深入的研究。这里，$u=(u_1\cdots,u_m)$，$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)$，$F=(F_1\cdots,F_m)$，均为m维向量值函数，$A(x,t,u,\cdots,u_{x^{M-1}})$为m阶函数矩阵。文［3］研究了在$R^{n+1}$空间中的任意区域D中，2m阶线性抛物型方程。

本文1988年3月3日收到

$$u_t + \sum_{|i|\le 2m} a_i(x, t) D^i u = f(x, t)$$

的初边值问题的解的渐近性质。而本文则利用能量估计法和Leary-Schauder不动点定理，讨论了类似于文[1]、[2]中所提问题的一类非线性抛物型方程组初边值问题的广义解的渐近性质。

2 基本假定

用$C^k[0,1]$，$L_2(0,1)$分别表示k次连续可微函数空间和平方可积函数空间。$H^k(0,1)$，$H^{(2M,1)}(Q_T)$表示Sobelev空间，其中$Q_T=\{0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$。$H_0^k[0,1]=\{u \mid u\in H^k(0,1), u_{x^i}(0)=u_{x^i}(1)=0, i=0,1,\cdots,k-1\}$规定模$\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_2(0,1)}$，$(\cdot,\cdot)$表示$R^m$中的数量积。

考虑问题（I）：

$$u_t+Lu\equiv u_t+(-1)^M A(x,t)\, u_{x^{2M}}=F(x,t,u,\cdots,u_{x^{M-1}}), 0\le x<1, t>0 \quad (2.1)$$

$$u_{x^k}(0,t)=u_{x^k}(1,t)=0 \quad k=0,1,\cdots,M-1。t\ge 0。 \quad (2.2)$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad 0\le x\le 1。 \quad (2.3)$$

和问题（II）

$$L_0V\equiv(-1)^M B(x)\, V_{x^{2M}}=G(x,v,\cdots,V_{x^{M-1}}), \quad 0<x<1, \quad (2.4)$$

$$V_{x^k}(0)=V_{x^k}(1)=0 \qquad k=0,1,\cdots,M-1。 \quad (2.5)$$

作如下基本假定：

2.1 系数矩阵$A(x,t)$，$B(x)$为m阶正定矩阵，即对$\forall(x,t)\in Q=\{0\le x\le 1, 0\le t<\infty\}$，存在$\nu>0$，使对$\forall\xi\in R^m$，有$(\xi, A\xi)\ge\nu(\xi,\xi)$。且$A(x,t)$，$B(x)$的所有元素为连续函数。

2.2 m维向量值函数$F(x,t,p_0,\cdots,p_{M-1})$连续且满足条件，

$$|F|\le K\left(\sum_{i=0}^{M-1}|p_i|+1\right), (x,t)\in Q, p_0,\cdots,p_{M-1}\in R^m, k为一常数。$$

2.3 m维向量值函数$\varphi(x)=(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)\in C^M[0,1]$，且满足齐次边界条件（2.2）

2.4 $F(x,t,p_0,\cdots,p_{M-1})$关于$p_0,\cdots,p_{M-1}$局部Lipschitz连续。

2.5 算子$L\equiv(-1)^M A(x,t)\dfrac{\partial^{2M}}{\partial x^{2M}}$为正定算子，即对$\forall u\in H_0^M(0,1)$，有，

$$\int_0^1 (u, Lu)dx \ge a\|u_{x^m}\|^2, \quad a>0, 常数，$$

2.6 $F(x,t,p_0,\cdots,p_{M-1})$关于$p_0,\cdots,p_{M-1}$在$(L_2(Q))$中一致lipschitz连续，即

$$\|F(x,t,p_0,\cdots,p_{M-1})-F(x,t,p_0',\cdots,p_{M-1}')\|\le\delta\sum_{i=0}^{M-1}\|p_i-p_i'\|$$

其中常数δ满足：$\delta^2<\dfrac{2^{M-1}a^2}{M}$

2.7 当$t\to\infty$时，$\|F(x,t,p_0,\cdots,p_{M-1})-G(x,p_0,\cdots,p_{M-1})\|$关于$p_0,\cdots,p_{M-1}\in R^m$一致趋近于0，且$\|A(x,t)-B(x)\|$趋近于0。

注1[3]如果把2.5中的条件"对$\forall u\in H_0^M(0,1)$"换为"u在[0,1]内有

紧支"则二者是等价的。

注2，由2.5，2.7，注1可知，算子$L_0\equiv(-1)^M B(x)\frac{\partial^{2M}}{\partial x^{2M}}$也是正定算子。

注3，由2.7知，m维向量值函数$G(x, p_0, \cdots, p_{M-1})$关于$p_0, \cdots, p_{M-1}$在$L_2(0, 1)$中一致Lipchitz连续，即，

$$\| G(x, p_0, \cdots, p_{M-1}) - G(x, p'_0, \cdots, p'_{M-1}) \| \le \delta \sum_{i=0}^{M-1} \| p_i - p'_i \|.$$

定义，m维向量值函数$u \in H^{(2M,1)}(Q_T)$称为是方程(2.1)在矩形域$Q_T=\{0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$上的广义解，如果对任意光滑的试函数$\varphi(x, t)$，有，

$$\iint_{Q_T} \varphi[u_t + (-1)^M A(x, t) u_{x^{2M}} - F(x, t, u, \cdots, u_{x^{M-1}})]dxdt = 0$$

注4，若$u \in H^{(2M,1)}(Q_T)$是方程(2.1)在Q_T上的广义解，则对$\forall \varphi(x, t) \in L_2(Q_T)$，仍有，

$$\iint_{Q_T} \varphi[u_t + (-1)^M A(x, t) u_{x^{2M}} - F(x, t, u, \cdots, u_{x^{M-1}})]dxdt = 0$$

3 一些引理

引理1[2]，在基本假定2.1－2.4下，问题(Ⅰ)在矩形域Q_T上存在唯一的广义解。即存在唯一的函数$u(x, t)\in H^{(2M,1)}(Q_T)$，在普通的意义下满足边界条件(2.2)和初始条件(2.3)，在广义的意义下满足方程(2.1)。

注5，在引理1中，由于时间区间$[0, T]$的任意性，故引理1在区域$Q=\{0\le x\le 1, 0\le t<\infty\}$上仍然成立。

引理2，对线性常微分方程组(Ⅲ)，

$$(-1)^M B(x) V_{x^{2M}} = f(x) \qquad 0<x<1 \qquad (3.1)$$

$$V_{x^k}(0) = V_{x^k}(1) = 0 \qquad k=0, 1, \cdots, M-1 \qquad (3.2)$$

如果m维向量值函数$f(x)\in C(0, 1)$，则问题(Ⅲ)存在唯一解$V(x)\in C^{2M}(0, 1)\cap C^{M-1}[0, 1]$

证明，问题(Ⅲ)等价于(Ⅳ)，

$$V_{x^{2M}} = (-1)^M B^{-1}(x) f(x) \equiv \tilde{f}(x) \qquad 0<x<1$$

$$V_{x^k}(0) = V_{x^k}(1) = 0 \qquad k=0, 1, \cdots, M-1$$

因(Ⅳ)对应的齐次问题只有零解，故(Ⅳ)存在唯一解$V(x)=(V_1(x), \cdots, V_i(x), \cdots, V_m(x))\in C^{2M}(0, 1)\cap C^{M-1}[0, 1]$。其中，$V_i(x)=\int_0^1 \Gamma_i(x, \xi)\tilde{f}_i(\xi)d\xi$，$\Gamma_i(x,\xi)$是对应齐次问题的Green函数[4]，$i=1, 2, \cdots, m$。

引理3 如果$u\in H_0^M[0, 1]$，则对$\forall K=0, 1, \cdots, M-1$。有，

$$\| u_{x^k} \| \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{M-k} \| u_{x^M} \|。 \qquad (3.3)$$

证明，因$u_{x^k}\in H_0^{M-k}[0, 1]$，$k=0, 1, \cdots, M-1$，故：

$$|u_{x^k}|^2 = \left|\int_0^x u_{x^{k+1}}(\xi)d\xi\right|^2 \le x\int_0^x |u_{x^{k+1}}(\xi)|^2 d\xi \le x\int_0^1 |u_{x^{k+1}}(\xi)|^2 d\xi$$

二端积分得，$\|u_{x^k}\|^2 \le \frac{1}{2}\|u_{x^{k+1}}\|^2$，递推即得（3.3）。

引理4，如果L_0是正定算子，$G(x, p_0, \cdots, p_{M-1})$在$L_2(0, 1)$中关于$p_0, \cdots, p_{M-1}$一致lipschitz连续，且lipschitz常数δ满足，$\delta^2 < \frac{2^{M-1}a^2}{M}$，则问题（II）存在唯一解 $V(x) \in C^{2M}(0, 1) \cap C^{M-1}[0, 1]$

证明，取基本空间为$C^{M-1}(0, 1)$，定义具有参数λ（$0 \le \lambda \le 1$）的算子T_λ：$C^{M-1}(0, 1) \to C^{M-1}(0, 1)$如下；对$\forall Z = (Z_1, \cdots, Z_{M-1}) \in C^{M-1}(0, 1)$，$V = T_\lambda Z$是常微分方程组边值问题，

$$(-1)^M B(x) V_{x^{2M}} = \lambda G(x, Z, \cdots, Z_{x^{M-1}}) \qquad 0 < x < 1$$

$$V_{x^k}(0) = V_{x^k}(1) = 0 \qquad k = 0, 1, \cdots, M-1$$

的解。由引理2知，算子T_λ对$0 \le \lambda \le 1$有意义。对每个固定的λ，设$V_1 = T_\lambda Z^{(1)}$，$V_2 = T_\lambda Z^{(2)}$，$Z^{(1)}, Z^{(2)} \in C^{M-1}(0, 1)$，则$V_1 - V_2$满足：

$$(-1)^M B(x)(V_1 - V_2)_{x^{2M}} = \lambda[G(x, Z^{(1)}, \cdots, Z^{(1)}_{x^{M-1}}) - G(x, Z^{(2)}, \cdots, Z^{(2)}_{x^{M-1}})] \qquad (3.4)$$

$$(V_1 - V_2)_{x^k}(0) = (V_1 - V_2)_{x^k}(1) = 0 \qquad k = 0, 1, \cdots, M-1。 \qquad (3.5)$$

二端用$(V_1 - V_2)$作数量积，而后在$(0, 1)$上积分利用$L_0 \equiv (-1)^M B(x)\frac{\partial^{2M}}{\partial x^{2M}}$的正定性及关于$G(x, p_0, \cdots, p_{M-1})$的假定和引理3得：

$$a\|(V_1 - V_2)_{x^M}\|^2 \le 2^{M-1}a\|V_1 - V_2\|^2 + \frac{M\delta^2}{2^{M+1}a}\sum_{i=0}^{M-1}\|(Z^{(1)} - Z^{(2)})_{x^i}\|^2$$

$$\le \frac{a}{2}\|(V_1 - V_2)_{x^M}\|^2 + \frac{M\delta^2}{2^{M+1}a}\sum_{i=0}^{M-1}\|(Z^{(1)} - Z^{(2)})_{x^i}\|^2 \qquad (3.6)$$

故$\|(V_1 - V_2)_{x^M}\| \to 0$　（$\|Z^{(1)} - Z^{(2)}\|_{C^{M-1}(0,1)} \to 0$）利用引理3和Sobelev内插不等式即知[5]，

$\|V_1 - V_2\|_{H^M(0,1)} \to 0$，又由Sobelev嵌入定理[5]，

$\|V_1 - V_2\|_{C^{M-1}[0,1]} \to 0$（$\|Z^{(1)} - Z^{(2)}\|_{C^{M-1}(0,1)} \to 0$）

用同样的方法可知，当Z在$C^{M-1}(0, 1)$中的任意有界集M中变动时，算子T_λ关于参数λ一致连续（$0 \le \lambda \le 1$）且T_λ将$C^{M-1}(0, 1)$中的有界集映为$H^M(0, 1)$中的有界集，即$C^{M-1}(0, 1)$中的列紧集，故算子T_λ $C^{M-1}(0, 1) \to C^{M-1}(0, 1)$是一个紧变换。又显然当$\lambda = 0$时，$V = T_0 Z$存在唯一的不动点0。

下面建立起对算子T_λ的一切可能的不动点即非线性方程组，

$$(-1)^M B(x) V_{x^{2M}} = \lambda G(x, v, \cdots, V_{x^{M-1}}), \quad 0 < x < 1 \qquad (3.7)$$

$$V_{x^k}(0) = V_{x^k}(1) = 0 \qquad k = 0, 1, \cdots, M-1 \qquad (3.8)$$

的一切可能的解，对$0 \le \lambda \le 1$的一致性先验估计。（3.7）二端用V作数量积并在（0，1）上积分可得，

$$a\|V_{x^M}\|^2 \le 2^{M-1}a\|V\|^2 + \frac{2}{2^{M+1}a}\|G(x, v, \cdots, V_{x^{M-1}}) - G(x, 0, \cdots, 0)\|^2$$

$$+ \frac{2}{2^{M+1}}\|G(x, 0, \cdots, 0)\|^2$$

$$\frac{a}{2}\|V_{x^M}\|^2+\frac{M\delta^2}{2^M a}\sum_{i=0}^{M-1}\|V_{x^i}\|^2\le k_1$$

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{M\delta^2}{2^M a}\right)\|V_{x^M}\|^2\le k_1$$

因 $\delta^2<\frac{2^{M-1}a^2}{M}$，故可知，$\|V_{x^M}\|\le k_2$、由引理3知，$\|V\|_{H^M(0,1)}\le k_3$

由嵌入定理知：$\|V\|_{C^{M-1}(0,1)}\le K_4$，这里 K_1、K_2、K_3、K_4 均为常数。

这样由Leary-schauder不动点定理知，算子 T_λ 在 $C^{M-1}(0,1)$ 中有一个不动点 又由引理2即知问题（II）存在唯一解 $V(x)\in C^{2M}(0,1)\cap C^{M-1}(0,1)$

4 解的渐近性质

在基本假定 2.1 — 2.7 下，由引理1，4可知问题（I）、（II）分别存在唯一的广义解 $u(x,t)\in H^{(2M,1)}(Q)$ 和唯一的古典解 $V(x)\in C^{2M}(0,1)\cap C^{M-1}[0,1]$

令 $W(x,t)=u(x,t)-V(x)$，则在 $L_2(Q)$ 中W满足方程

$$W_t+(-1)^M A(x,t)W_{x^{2M}}=g \tag{4.1}$$

并在通常的意义下满足边界条件：

$$W_{x^k}(0,t)=W_{x^k}(1,t)=0,\ k=0,1,\cdots,M-1, \tag{4.2}$$

其中，
$$\begin{aligned}
g={}&(-1)^M[A(x,t)-B(x)]V_{x^{2M}}+F(x,t,u,\cdots,u_{x^{M-1}})\\
&-G(x,v,\cdots,v_{x^{M-1}})\\
={}&(-1)^M[A(x,t)-B(x)]V_{x^{2M}}+[F(x,t,u,\cdots,u_{x^{M-1}})-\\
&-G(x,u,\cdots,u_{x^{M-1}})]+[G(x,u,\cdots,u_{x^{M-1}})-G(x,v,\cdots,v_{x^{M-1}})]\\
={}&\eta(x,t)+[G(x,u,\cdots,u_{x^{M-1}})-G(x,v,\cdots,V_{x^{M-1}})]
\end{aligned}$$

由基本假定 2.7 知，$\|\eta(x,t)\|\to 0$，$(t\to\infty)$。(4.1) 二端用W作数量积并在 $(0,1)$ 上积分，利用算子 $L\equiv(-1)^M A(x,t)\frac{\partial^{2M}}{\partial x^{2M}}$ 的正定性及Hölder不等式得，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|W\|^2+2a\|W_{x^M}\|^2&\le 2^M a\|W\|^2+\frac{1}{2^{M+2}a}\|g\|^2\\
&\le a\|W_{x^M}\|^2+\frac{M\delta^2}{2^{M+1}a}\sum_{i=0}^{M-1}\|W_{x^i}\|^2+\frac{1}{2^{M+1}a}\|\tilde{\eta}(x,t)\|^2\\
&\le\left(a+\frac{M\delta^2}{2^{M+1}a}\right)\|W_{x^M}\|^2+\tilde{\eta}(t)
\end{aligned}$$

其中，$\tilde{\eta}(t)=\frac{1}{2^{M+1}a}\|\eta(x,t)\|^2\to 0$，$(t\to\infty)$。

故，$\frac{d}{dt}\|W\|^2+3\cdot 2^{M-2}a\|W\|^2\le\tilde{\eta}(t)$

所以，$\|W\|^2\le e^{-3\cdot 2^{M-2}a}\left[\int_{t_0}^{t}\tilde{\eta}(\tau)e^{3\cdot 2^{M-2}a\tau}d\tau+\|W\|^2(t_0)\right]$

因 $\tilde{\eta}(t)\to 0$，$(t\to\infty)$。所以对 $\forall\varepsilon>0$，取 t_0 充分大，使当 $t>t_0$ 时，$\tilde{\eta}(t)<3\cdot 2^{M-3}a\varepsilon$，故：

$$\|W\|^2 \leqslant e^{-3\cdot 2^{M-2}at}\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(e^{3\cdot 2^{M-2}at}-e^{3\cdot 2^{M-2}t_0}\right)+\|W\|^2(t_0)\right]$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+e^{-3\cdot 2^{M-2}at}\|W\|(t_0)<\varepsilon \qquad (t\to\infty)$$

定理1、如果基本假定 2.1 — 2.7 成立，则问题（I），（II）分别存在唯一的广义解 $u(x,t)\in H^{(2M,1)}(Q)$ 和唯一的古典解 $V(x)\in C^{2M}(0,1)\cap C^{M-1}[0,1]$，并且当 $t\to\infty$ 时，$\|u(x,t)-V(x)\|\to 0$

参考文献

[1] КРУЖКОВ. С. Н. ТРУДЫ СЕМИНАРА НМ. N. Г. ПЕТРОВСКОГО. ВНп. 5(1979) 217 —272

[2] ZHOU Yu-Lin, Finite ditterence mothed of first boundary problem for quasilinear Parabolic systems, scientia Sinaca (seriesA) Anrill (1985) Vol XXVIII. No. 4, 368-385

[3] A. Friedman, Asymptotic behavior of solutions of parabolic equations. Acta Math. 106(1961) 1 -43

[4] E. 卡母克著"常微分方程手册"，209

[5] R. A. ADAMS, "Sobelev Space" 89, 189

Asympototic Behavior of Solution of Inital And Bovndary Problem for A High-order Nonyinear Parabolic Eqvation Systems

Yang Zhijian　zhao　zhan -chai

Abstract: In this paper we discuss the behavior of solution of initial and boundary problem (I) as $t\to\infty$. Using energy estimate mathed and Leary-Schauder fixed point theorem, we obtain the asymptotic behavior of this problem.

Keywords: interpolating inequation of sobolev, imbedding theorem of sobolev type, fixed point theorem of Leary-Schauder, positively of operator, soboiev space.