第10卷第1期 郑州工学院学报 VOL.10 No.1
1989年2月 February 1989

平板几何时间依赖迁移方程广义边界条件积分边界——源迭代法收敛性

徐建国

（管理系，运筹教研室）

提 要：本文给出了一类具广义积分边界条件的中子迁移方程解的积分边界——源迭代法，并证明了其收敛性

关键词：迁移方程，积分边界——源迭代法，收敛性

1 模型、符号、物理意义及假定

在核反应堆理论和计算中，求解中子迁移方程的解（角通量）是一个中心问题之一[1][2][3]。能够精确求解的中子迁移方程是极其个别的特殊情况。一般地，是近似求解。关于广义边界条件迁移方程开始的年限不太长，这方面的结果甚少。本文目的在于给出广义边界条件的迁移方程解的积分边界——源迭代法收敛性。

考虑具下面形式的一类积分边界条件的中子迁移方程[4]

$$\frac{\partial N(x,y,t)}{\partial t}=-vy\frac{\partial N(x,y,t)}{\partial x}-v\Sigma(x)N(x,y,t)+\frac{v\gamma(x)}{2}\int_{-1}^{1}N(x,y',t)\,dy'$$

$$|x|<a,\quad |y|<1,\quad 0\le t<\infty \tag{1.1}$$

$$N(x,y,t)=q(x,y)$$

$$N(-a,y,t)=\int_{-1}^{0}\frac{|y'|}{y}h(y,y')N(-a,y',t)\,dy',\quad y\in(0,1) \tag{1.3}$$

$$N(a,y,t)=\int_{0}^{1}\frac{|y'|}{y}k(y,y')N(a,y',t)\,dy',\quad y\in(-1,0) \tag{1.4}$$

这里N表示宽度为2a的平板内中子的分布密度，v为中子运动速度，设为正常数；若中子运动的方向与x轴正向夹角为θ，则$y=\cos\theta$。$\Sigma(x)$，$\gamma(x)$分别表示宏观吸收截面和散射裂度截面；$q(x,y)$表示初始中子分布密度。$h(y,y')$，$k(y,y')$满足下述条件

$$\int_{0}^{1}h(y,y')\,dy=b^{-}(y')\le b<1,\quad y'\in(-1,0) \tag{1.5}$$

$$\int_{-1}^{0}k(y,y')\,dy=b^{+}(y')\le b<1,\quad y'\in(0,1) \tag{1.6}$$

这里$b=\max\{\operatorname{ess\,sup}[b^{-}(y'),y'\in(-1,0)],\ \operatorname{ess\,sup}[b^{+}(y'),y'\in(0,1)]\}$

这里指出$h(y,y')dydy'$的物理意义可认为是一个具有速率的中子，其方向与x轴正向夹角余

弦在$(y', y'+dy')$ $(y'\in(-1, 0))$范围内，经过平板$x=a$反射到速度与x轴正向夹角余弦在$(y, y+dy)$ $(y\in(0,1))$范围内相同点处的几率；$k(y, y')$可类似考虑。故(1.6)表示平板无增殖中子。

接下来，假定$h(y, y')$，$k(y, y')$，满足下述关系[4]：

$$|y'|k(y, y')=yh(-y', -y) \quad y\in(0, 1), y'\in(-1, 0) \tag{1.7}$$

$$y'k(y, y')=|y|k(-y', -y) \quad y\in(-1, 0), y'\in(0, 1) \tag{1.8}$$

上两式数学物理意义在于相互作用关系。对于反射裂变边界条件之情形[5][6]，(1.7)(1.8)可作为特例被省去。

现假若$\Sigma(x)$，$\gamma(x)$，$q(x, y)$均为连续函数，且

$$0<\Sigma_m=\inf\{\Sigma(x), |x|\le 1\}\le\Sigma(x)\le\Sigma_M=\sup\{\Sigma(x), |x|\le 1\} \tag{1.9}$$

$$0<\gamma_m=\inf\{\gamma(x), |x|\le 1\}\le\gamma(x)\le\gamma_m=\sup\{\gamma(x), |x|\le 1\} \tag{1.10}$$

引进符号表示

$$\mathbb{B}N=-vy\frac{\partial N(x, y, t)}{x}-v\Sigma(x)N(x, y, t)$$

$$\mathcal{J}N=\frac{v\gamma(x)}{2}\int_{-1}^{1}N(x, y', t)\,dy'$$

为了下面的需要，引入通常意义下的连续函数集合构成的Banach空间$C(X)$，其中X表示矩形区域$\{(x, y, t)\,|\,|x|\le a, |y|\le 1, 0\le t\le t_0\}$，$t_0=\dfrac{1-b}{2v\gamma_m}$

对$\forall f\in C(X)$，

$$\|f\|=\max\{|f(x, y, t)|, (x, y, t)\in X\}$$

下一节中将在$C(X)$上讨论问题(1.1)—(1.4)

2 积分边界——源迭代法及其收敛性

本文所提出的积分边界——源迭代法是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N_{n+1}}{\partial t}=\mathbb{B}N_{n+1}+\mathcal{J}N_n & (2.1)\\ N_{n+1}(x, y, 0)=q(x, y) & (2.2)\\ N_{n+1}(-a, y, t)=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{|y'|}{y}h(y, y')N_n(-a, y', t)\,dy' & (2.3)\\ N_{n+1}(a, y, t)=\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{y'}{|y|}k(y, y')N_n(a, y', t)\,dy' & (2.4)\end{cases}$$

作如下代换$x=x'+vy\xi$，$t=t'+\xi$，方程(2.1)可变为以下形式

$$\frac{d}{d\xi}\left(N_{n+1}(x'+vy\xi, y, t'+\xi)\,e^{v\int_0^{\xi}\Sigma(x'+vy\tau)\,d\tau}\right)$$

$$=\frac{v\gamma(x'+vy\xi)}{2}\int_{-1}^{1}N_n(x'+vy\xi, y', t'+\xi)\,dy'\cdot e^{v\int_{-1}^{\xi}N_n(x'+vyt)\,d\tau} \tag{*}$$

上式两边对ξ从$-\frac{x'+a}{vy}$到0（y>0）进行积分得到

$$N_{n+1}(x,y,t)=N_{n+1}(-a,y,t-\frac{x+a}{vy})e^{v\int_0^{\frac{x+a}{vy}}\Sigma(x+vy\tau)d\tau}$$

$$+\frac{v}{2}\int_{-\frac{x+a}{vy}}^{0}d\xi\int_{-1}^{1}\gamma(x+vy\xi)N_n(x+vy\xi,y',t+\xi)dy'$$

再进行适当变换令τ为$-\tau$，ξ为$-\xi$，将方程（2.3）（1.7）代入，经整理即为

$$N_{n+1}(x,y,t)=\int_{-1}^{0}h(-y',y)N_n(-a,y',t-\frac{x+a}{vy})dy'e^{-v\int_0^{\frac{x+a}{vy}}\Sigma(x-vy\tau)d\tau}$$ (2.5)

$$+\frac{v}{2}\int_0^{\frac{x+a}{vy}}d\xi\int_{-1}^{1}\gamma(x-vy\xi)N_n(x-vy\xi,y',t-\xi)e^{-v\int^{\xi}\Sigma(x-vy\tau)d\tau}dy',$$

$$vyt>x+a\qquad y\in(0,1]$$

同理（*）式两边对ξ分别由$-t'$到0；由$-\frac{x'-a}{vy}$到0（y<0）进行积分，然后将方程（2.2）（2.3）（1.8）分别代入积分结果而得到

$$N_{n+1}(x,y,t)=q(x-vyt,y)e^{-v\int^{t}\Sigma(x-vyt)d\tau}$$

$$+\frac{v}{2}\int_0^{t}d\xi\int_{-1}^{1}\gamma(x-vy\xi)N_n(x-vy\xi,t-\xi)e^{-v\int_0^{\frac{x-a}{vy}}\Sigma(x-vy\tau)d\tau}dy'$$ (2.6)

$$x-a\le vyt\le x+a$$

$$N_{n+1}(x,y,t)=\int_0^{1}k(-y',-y)N_n(a,y',t-\frac{x-a}{vy})e^{-v\int_0^{\xi}\Sigma(x-vy\tau)d\tau}$$

$$+\frac{v}{2}\int_0^{\frac{x-a}{vy}}d\xi\int_{-1}^{1}\gamma(x-vy\xi)N_n(x-vy\xi,y',t-\xi)e^{-v\int_0^{\xi}\Sigma(x-vy\tau)d\tau}dy',$$ (2.7)

$$vyt<x-a\qquad y\in(-1,0)$$

由此得到下述引理

引理1　迭代程序（2.1）（2.2）（2.3）（2.4）等价于（2.5）（2.6）（2.7）

引理2　对于非负初始分布q（x，y），迭代序列{N_n}非负，且在C(X)范数意义下收敛

证明　关于序列{N_n}的非负性由（2.5）（2.6）（2.7）容易得知

由于 $\int_0^1 h(y,y')dy=b^-(y')\le b<1\qquad y'\in(-1,0)$

$\int_{-1}^{0}k(y,y')dy=b^+(y')\le b<1\qquad y'\in(0,1)$

分别对（2.5）（2.6）（2.7）进行估计可得

$|N_{n+1}-N_n|\le(b+v\gamma_m t)|N_n-N_{n-1}|\qquad vyt>x+a\quad y\in(0,1)$

$|N_{n+1}-N_n|\le v\gamma_m t|N_n-N_{n-1}|\qquad x-a\le vyt\le x+a$

$|N_{n+1}-N_n|\le(b+v\gamma_m t)|N_n-N_{n-1}|\qquad vyt<x-a\quad y\in(-1,0)$

从而总有

$$\|N_{n+1}-N_n\| \le (b+v\gamma_m t_0)\|N_n-N_{n-1}\| \qquad (**)$$

下证引理第二部分：

对任何自然数n、p、

$$\|N_{n+p}-N_n\| \le \|N_{n+p}-N_{n+p-1}\| + \|N_{n+p-1}-N_{n+p-2}\| + \cdots + \|N_{n+1}-N_n\| \le [(\frac{1+b}{2})^{n+p-1}+(\frac{1+b}{2})^{n+p-2}+\cdots+(\frac{1+b}{2})^{n}]\|N_1-N_0\|$$

$$= \frac{[(\frac{1+b}{2})^{n}-(\frac{1+b}{2})^{n+p}]}{\frac{1+b}{2}}\|N_1-N_0\|$$

所以对$\forall p\in N$（自然数集），由上不等式知，

$$\lim_{n\to\infty}\|N_{n+p}-N_n\|=0$$

即$\{N_n\}$为$C(X)$中的cauchy列，由$C(X)$的完备性知，存在$N_0^*\in C(X)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}N_n=N_0^*$$

故知$N_0^*(x,y,t)$，$0\le t\le t_0$满足方程(2.5)(2.6)(2.7)，从而$N_0^*(x,y,t)$亦满足方程式(1.1)(1.2)(1.3)(1.4)，引理得证

从上面迭代过程知，用积分边界——源迭代，当$0\le t\le t_0$时，迁移方程(1.1)(1.2)(1.3)(1.4)有非负数$N_0^*(x,y,t)$，将$N_0^*(x,y,t_0)$视为初始分布，再按上述迭代格式(2.1)(2.2)(2.3)(2.4)重复上述迭代过可得知(1.1)(1.2)(1.3)(1.4)在$t\in[t_0, 2t_0]$上有解$N_1^*(x,y,t)$。由于上述迭代可无限次地进行下去，从而可用积分边界——源迭代法求出任何给定时刻t时中子角通量分布密度函数$N^*(x,y,t)$，且$N^*(x,y,t)$是非负函数。

故下述定理成立。

定理　运用积分边界——源迭代法，可求出时间依赖平板几何迁移方程(1.1)(1.2)(1.3)(1.4)的解。

在本文写作过程中，得到系统科学研究所朱广田副研究员、陈虹秋同志、西安交大数学系王绵森副教授的帮助，特此致谢。

参 考 文 献

[1] Davison.B. "Neutron Theory". Oxford University Press. 1957

[2] Bell.G.I. and Glasstone.S. Nuclear Reactor Theory". van Nostrand Princeton. N.J. 1971

[3] Duderznadt.J and Martin. W. R. "Transport Theory". John Wilev and Sons. 1979

[4] Busoni. G and Frosal. G. Math Mech sci, 6 (1984) pp. 68-63

[5] Belleni-Morante, A, J, Math Analy Appl, 30 (1970) pp 353—374

[6] wilson, D, J, G Math Appl, 47 (1974), pp, 182—209

Convergence of Integral Boundary - Resouce Interative Method of Time Depondence Transport Equation With Generalized Boundary Conditions and the Slab Geometry

Xu Jian Guo
(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: In this papar, A integral boundary - resouce interative meth-od of the solution for a class of neutron transport equations with generalized integral boundary conditions is given and its convergence is proved.

Keywords: Transport equation. Integral boundary - resouce interative method, couvergence.

(上接100页)

On Some Problem of Circuit With Controlled Source

Wang Junkun　　Zhou Caiping
(Electrical Engineering Department)

Abstract: This paper discusses the transfer of controlled variable in the linear circuit with controlled source and the problems deserving of attention when the superposition theorem and Thevenin's theorem are used to analyse such cirucits.

keyworbs. controlled source, transfer of controlled variable, superposition theorem, Thevenin's theorem.