第10卷 第1期 郑州工学院学报 VOL.10 NO.1
1989年2月 JOURNAL OF ZHENGZHOU INSTITUTE OF TECHNOLOGY February 1989

体系构造分析的一种算法及程序实现

樊友景

（土建系）

提 要： 本文根据构造分析时可将杆件视作刚性的假设，对连接n个结点的各类杆件导出了相应的2n－3个独立的约束方程；考虑到体系的约束方程组（以结点位移为未知量的齐次线性方程组）的系数矩阵的极度稀疏性，采用初等变换的思想将它化成阶梯型方程；根据变换结果，判断出体系的几何可变性、多余约束的数目、自由度数目，并指出各自由度发生的哪个结点的哪个方向，以便进行改善。

关键词： 体系，自由度，多余约束。

1 问题的提出

体系可以看成是由对象加上约束组成的。在这里把结点视作对象，杆件视作约束。先设想体系中的约束全不存在，这样平面内几个结点的自由度总数为2n，其次将全部约束（设共有m个）加上去，若全部约束中有m_1个约束是非多余约束，那么体系的自由度数为

$$S=2n-m_1 \tag{1}$$

从概念上讲（1）式很简单，但用起来却有困难。因为首先要分清楚哪些约束是有用的，哪些约束是多余的。由于这个问题涉及到体系的具体构造形式。体系越复杂这个问题越难于解决。于是希望将这个难题交给计算机去解决。这样就需要将每个约束数据化，用一个约束方程来表示一个约束对体系所起的约束作用。

2 各种杆件的约束方程

2.1 简单链杆的约束方程

如图1所示仅在两端具有铰结点的杆件称为简单链杆。由于进行构造分析时忽略了材料微小变形的影响，把每根杆件都看作刚性的。这样A、B两点将被杆件AB刚性地连在一起。当A、B两点分别发生位移u_A、V_A、u_B、V_B时，因AB杆不能伸长使得A、B两点沿杆轴线方向的线位移必须相等。即：

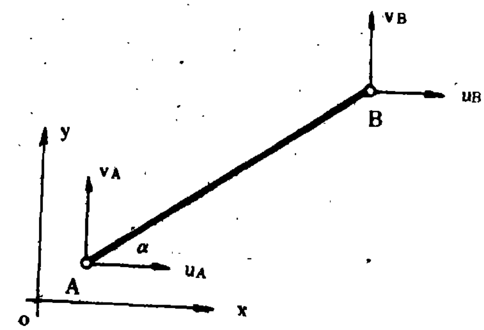


图1

$$u_A \cos\alpha + V_A \sin\alpha = u_B \cos\alpha + V_B \sin\alpha \qquad (2)$$

该式中α表示AB杆与X轴的夹角。若用A、B两点的坐标表示方向余弦$\cos\alpha$、$\sin\alpha$，那么（2）式变为：

$$u_A(x_B - x_A) + v_A(y_B - y_A) - u_B(x_B - x_A) - v_B(y_B - y_A) = 0 \qquad (3)$$

这就是简单链杆的约束方程。可见u_A、v_A、u_B、v_B中只有三个是独立的[1]。

2.2 折线和曲线复杂杆件

所谓复杂杆件就是联结三个或三个以上结点的杆件。图2所示的复杂杆件具有这样的特点：即由某端的前两个结点向其余结点引直线，这些直线均不会重合。

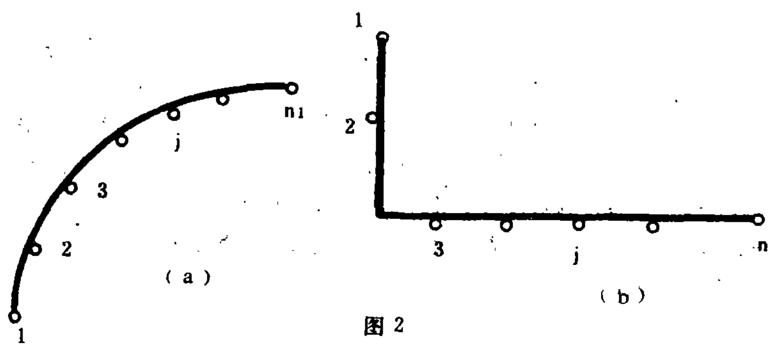


图 2

对这样的曲线或折线形杆件，就其对各结点的约束作用来说等价于图3所示的铰结体系。因为它们均使平面内n_1个结点的$2n_1$个自由度减少到了3个自由度，因此图3中各体系的约束方程也就是图2中相应杆件的约束方程。而图3所示体系是在结点1与结点2、3、4…

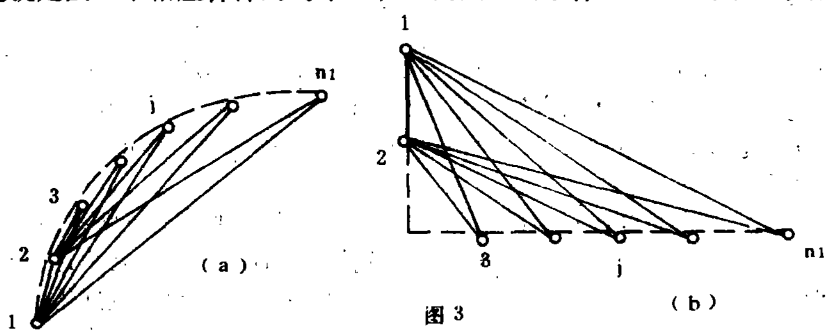


图 3

…n_1之间加上n_1-1根简单链杆，在结点2与结点3、4……n_1之间加上n_1-2根简单链杆组成的铰结体系。其中每根简单链杆都可以提供一个如式（3）的约束方程即：

$$u_1(x_j - x_1) + v_1(y_j - y_1) - u_j(x_j - x_1) - v_j(y_j - y_1) = 0 \qquad (4)$$
$$(j = 2、3 \cdots\cdots n_1)$$

$$u_2(x_j - x_2) + v_2(y_j - y_2) - u_j(x_j - x_2) - v_j(y_j - y_2) = 0 \qquad (5)$$
$$(j = 3、4 \cdots\cdots n_1)$$

共有$n_1 - 1 + n_1 - 2 = 2n_1 - 3$个约束方程。

在图3的体系中如将12杆视为基础刚片，那么整个体系就可以看作是通过逐步加入二元体132、142、……$1n_12$组成的，在整个组成过程中既不缺少必要的约束，又无多余的

约束。故这 $2n-3$ 个约束方程是彼此独立的。于是得到对图2所示的连结 n_1 个结点的复杂杆件，它对体系所起的约束作用相当于 $2n_1-3$ 根简单链结，相应的约束方程如（4）、（5）式。

2.3 直线形复杂杆件

对于图4所示的复杂杆件，如仍用（4）、（5）式给出它的约束方程，就会发现这些方程之间是相关的。这是因为如果12杆段不会伸长，1 j杆段杆段不会伸长，则必有2 j杆段也不能伸长（j = 3、4…n_1） 这说明约束方程（5）在这种情况下不能再提供新的约束。但是由于整个杆件在位移过程中只能发生刚体位移。那么各点由于刚体转动角位移 α 引起的线位移之间必存在着一定的关系，我们可以由这些关系来寻找新的约束方程。

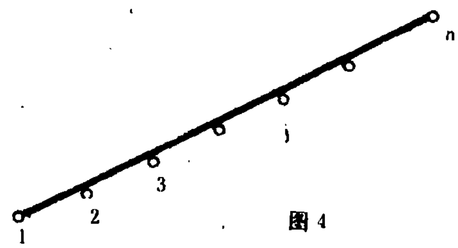


图4

如图5所示，假设杆件在位移过程中，由位置Ⅰ移到了位置Ⅲ。我们可以把杆件看作先平移 u_1、v_1 到达位置Ⅱ，然后绕结点1′转动 α 角到达位置Ⅲ。

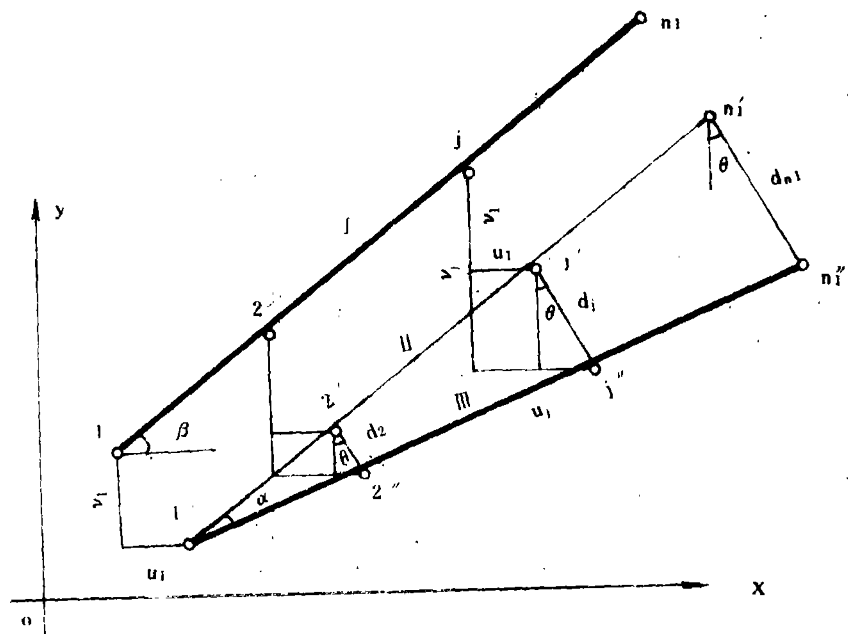


图5

由于杆件发生的是刚体转动，故可由相似三角形△1 2 2″，△1′j′j″得到以下关系：

$$\frac{d_2}{l_2}=\frac{d_j}{l_j} \quad (j=3,\ 4,\ \cdots\cdots n_1) \tag{6}$$

其中 d_j 为刚性转动引起的 j 点线位移，l_j 为结点 j 到结点1的距离。

由图5可见由于 d_2 平行于 d_j，所以它们与竖直线的夹角相等，设这个角度为 θ，则如图5所示：

$$d_2=(u_2-u_1)/\sin\theta$$
$$d_j=(u_j-u_1)/\sin\theta \tag{7}$$

或：
$$d_2=(v_2-v_1)/\cos\theta$$
$$d_j=(v_j-v_1)/\cos\theta \tag{8}$$

设杆件与 x 轴夹角为β则由图5可知：

$$l_2=(x_2-x_1)/\cos\beta$$
$$l_j=(x_j-x_1)/\cos\beta \tag{9}$$

或
$$l_2=(y_2-y_1)/\sin\beta$$
$$l_j=(y_j-y_1)/\sin\beta \tag{10}$$

将（8）、（9）两式代入（6）整理后得：

$$v_1\left(\frac{1}{x_j-x_1}-\frac{1}{x_2-x_1}\right)+v_2\cdot\frac{1}{x_2-x_1}-v_j\frac{1}{x_j-x_1}=0 \tag{11}$$
$$(j=3,4,\cdots\cdots n_1,\ x_2\neq x_1\neq x_j)$$

将（7）、（10）两式代入（6）式整理后得：

$$u_1\left(\frac{1}{y_j-y_1}-\frac{1}{y_2-y_1}\right)+u_2\cdot\frac{1}{y_2-y_1}-u_j\frac{1}{y_j-y_1}=0 \tag{12}$$
$$(j=3,4,\cdots\cdots n_1,\ y_2\neq y_1\neq y_j)$$

式（11）、（12）都是由式（6）得出的，当$\beta\neq0$，$\beta\neq90^\circ$时两者是等价的。故一般情况下选用（11）式列约束方程，当$x_1=x_2=x_j$时（即竖向直杆）我们改用（12）式来列约束方程。对图4所示直杆，式（4）给出n_1-1个约束方程，式（11）或式（12）给出n_1-2个约束方程，同样得到$2n_1-3$个约束方程。

另外对不属于2中所述的折杆或曲杆的其它复杂杆件。我们总可以先由式（4）得到$n-1$个约束方程；然后考察第 j 个结点与结点1、2是否共线，如果共线用式（11）或式（12）给出约束方程；否则用（5）式给出约束方程（其中$j=3,4,\cdots\cdots n_1$）。同样可以得到$2n-3$个约束方程。

3 分析方法

综上所述，我们可以对体系的各根杆件列出相应的约束方程，设共得m个。如果将所有n个可动结点的位移分量u_1，$v_1\cdots u_j$、$v_j\cdots u_n$，v_n排列成一个列向量：

$$\bar{d}=\{d_1,\ d_2\cdots\cdots d_p\}^T$$

（其中$d_{2i-1}=u_i$，$d_{2i}=v_i$，$p=2n$）那么这m个约束方程就是以$\bar{d}$为未知向量的m阶齐次线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l}c_{11}d_1+c_{12}d_2+\cdots\cdots+c_{1p}d_p=0\\ c_{21}d_1+c_{22}d_2+\cdots\cdots+c_{2p}d_p=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_{m1}d_1+c_{m2}d_2+\cdots\cdots+c_{mp}d_p=0\end{array}\right\} \tag{13}$$

尽管对单根杆件得到的约束方程是彼此独立的，但由它们得到的体系的约束方程（13）

就不一定再彼此独立了　只有独立的约束方程才减少体系的独立自由度，它所代表的那个约束才是有用的约束，而非独立的约束方程代表着多余的约束　另外如果方程组（13）只有零解，说明各结点均不能发生位移，体系是不变体系：如果该方程组存在非零解，说明某（或某些）结点可以移动，体系是可变体系　因此欲对体系进行构造分析，我们可以考察约束方程组（13）的诸方程是否互相独立；方程组（13）是否存在非零解　如用初等变换的方法将方程组（13）化成阶梯形方程组，这两方面的问题也就一目了然了。由式（4）、（5）、（11）、（12）、可见，每个约束方程中至多有四个非零项，这就是说方程组（13）的系数矩阵是一个极度稀疏的矩阵，这给初等变换的工作提供了很大的方便　下面就讨论具体的变换方法

3．1　对方程组（13）首先检查d_1的系数

3．1．1 如果d_1的系数c_{11}、c_{21}……c_{m1}全为零，说明方程组（13）对d_1没有任何约束，d_1可取任意值，那么体系至少有一个自由度　接下去行号不变跳到下一列，得到一个以d_2，d_3……d_p为未知量的新方程组（14），

$$\begin{array}{l} c_{12}d_2+c_{13}d_3+\cdots\cdots+c_{1p}d_p=0 \\ c_{22}d_2+c_{23}d_3+\cdots\cdots+c_{2p}d_p=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m2}d_2+c_{m3}d_3+\cdots\cdots+c_{mp}d_p=0 \end{array} \tag{14}$$

3．1．2 如果d_1的系数不全为零，不妨设$c_{j1}\neq0$ 利用初等变换3对调第j个方程与第一个方程；再利用初等变换1、2把第1列的其它元素化成零，于是方程组（13）就变成了下列方程组。

$$\begin{array}{l} c'_{11}d_1+c'_{12}d_2+c'_{13}d_3+\cdots\cdots+c'_{1p}d_p=0 \\ \qquad\quad c'_{22}d_2+c'_{23}d_3+\cdots\cdots+c'_{2p}d_p=0 \\ \qquad\quad c'_{32}d_2+c'_{33}d_3+\cdots\cdots c'_{3p}d_p=0 \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad c'_{m2}d_2+c'_{m3}d_3+\cdots\cdots+c'_{mp}d_p=0 \end{array} \tag{14'}$$

将该方程组的后m－1个方程组成的以d_2……d_p为未知量的方程组称为方程组（14′）。

对方程组（14）或（14′）进行上述同样的处理。若d_2的系数全为零。说明新方程组对d_2无任何约束d_2可取任何值。因为初等变换总是将方程组化成同解方程，故方程组（13）对d_2也无任何约束，d_2在体系中可取任意值，体系的自由度增加一。接着进行类似（1）的处理；如果d_2的系数不全为零，进行类似（2）的处理。这样又可得到一个m－2阶的方程组类似的处理一直作下去[2]。

用变量t来记录进行（1）的处理次数。

3．2　最后将约束方程化成以下两种阶梯方程的任一种形式。

3．2．1　由于列号超出P，终结初等变换。其系数矩阵变换成图6所示形式

该矩阵中＊表示非零元素。这种情况说明在进行初等变换的过程中，我们对全部位移分量进行了考察，其中由于跳列t次，有t个位移分量不受约束方程（13）的约束，可任意取值故体系的自由度为t。另一方面平面内n个结点原有p＝2n个自由度，加上m个约束后有t个自由度，这说明p－t个约束起到了约束作用，其余m－（p－t）个约束没有起约束体系自由度的作用，其为多余约束。因为体系有多余约束时，其约束方程彼此不独立

某个（或某些）约束方程可以由其它约束方程线性表出，因此不论它是不变体系或为可变体，初等变换后必出现0 = 0恒等式。并且这些恒等式的数目就是多余约束的数目。

3.2.2 如果初等变换是以行号超出m而终结，系数矩阵将变换成图7所示的阶梯形矩阵。可见在这种情况下不存在0 = 0恒等式，体系无多余约束。这说明加上的m个约束均起到了约束作用，减少了体系m个自由度，最后体系还有p − m个自由度。

另外在每次跳列时把当时的列号记录下来（即记录下来可任意取值的位移分量的序号）；对情况2由最后一行所表示的方程

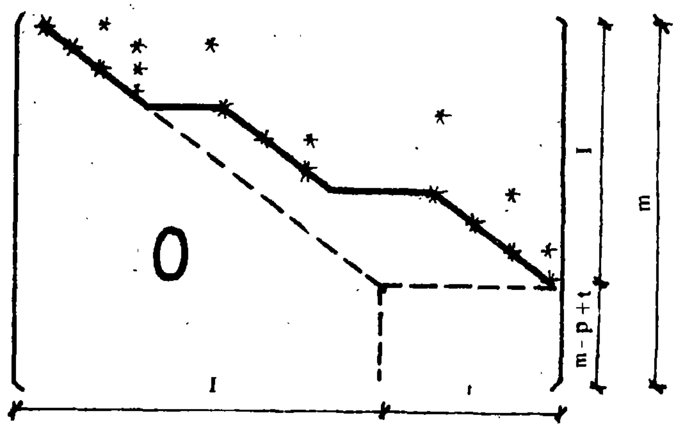


图 6

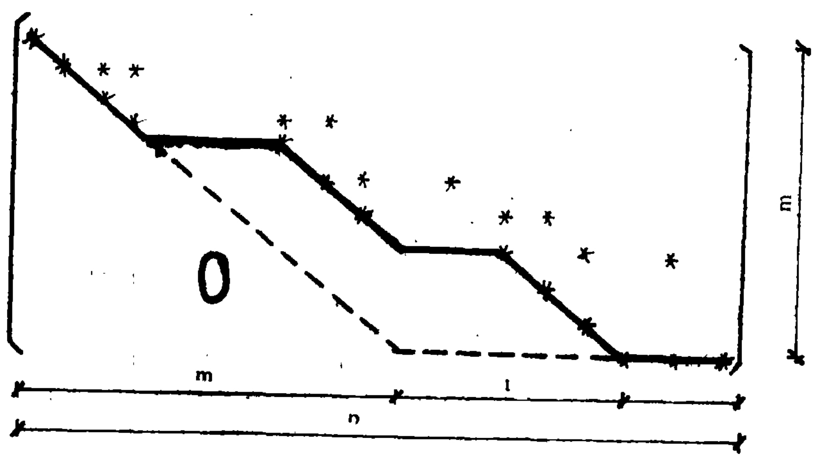


图 7

$$a_{mL}d_L + a_{m\,L+1}d_{L+1} + \cdots\cdots + a_{mp}d_p = 0 \qquad (a_{mL} \neq 0)$$

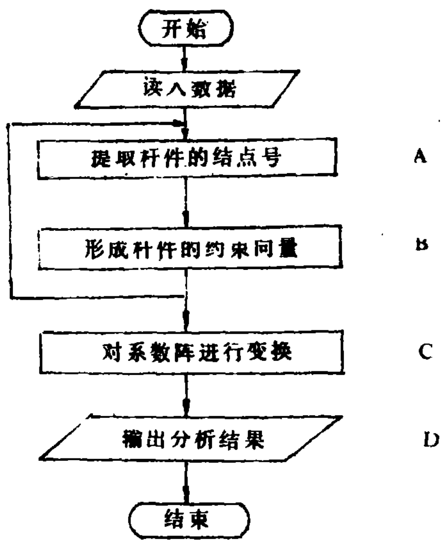
可见：除d_L外其它未知量均可任意取值。因此上还要把情况2的最后一行的第一个非零元素以后的列号记录下来。根据记录下来的这些列号就可以推算出体系缺少约束的位置与方向，以便进行改善。

设记录下来的某个列号为J，$\left(\frac{J+1}{2}\right)$取整后结果为K，那么如果$2 \times K = J$，说明K结点y向缺少约束；否则K结点x方向缺少约束。

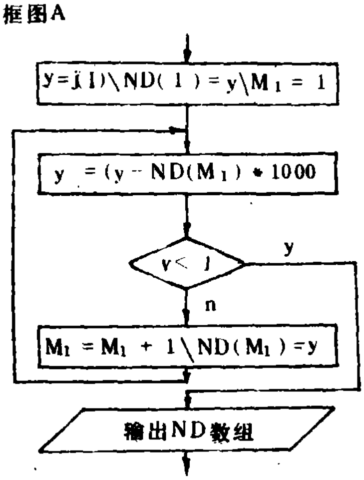
4　框图设计

输入信息：可动结点数N，总结点数NO，杆件数NE（包括可动铰支座处的支杆），结点座标数组X（N），Y（N），结点编号时先编可动结点后编固定结点。

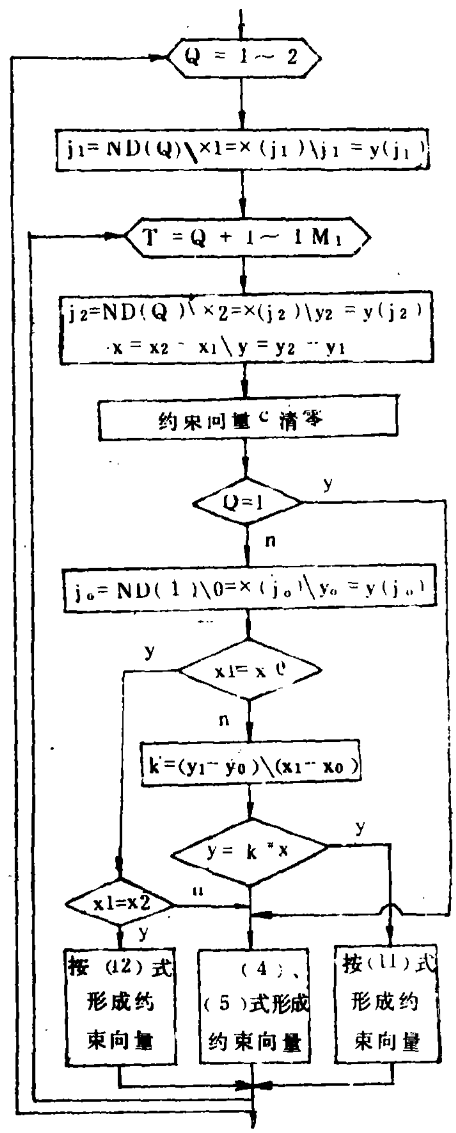
因各杆件连结的结点数不尽相同，不宜用一个二维数组来统一描述各杆件所连结的结点号，故采用紧缩存贮的方法，用一维数组J（NE）来存放各杆件的结点号。其中J（i）表示第 i 根杆上的诸个结点码：



子框图A



子框图B

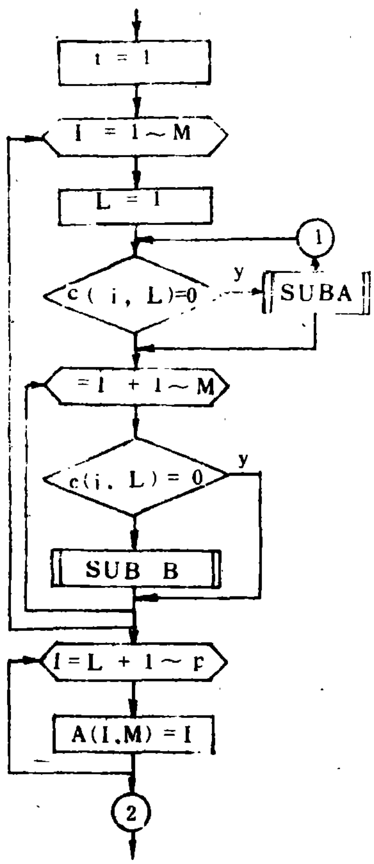


J(i)= ***.***.***…***

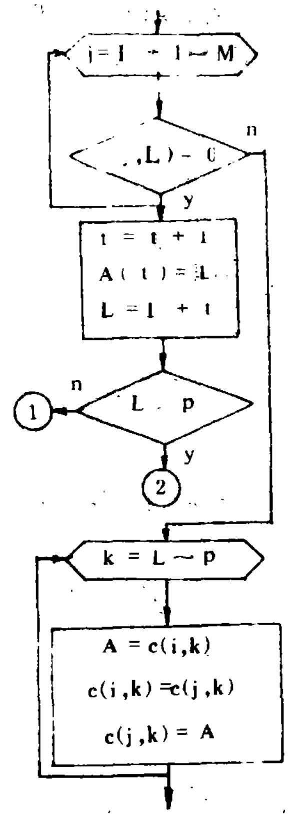
小数点前的整数部分代表第一个结点的结点号小数点后每三位为一组，分别代表第二、三……个结点的结点码。通过子框图A将实型结点码还原成整型结点号。

子框图B用来形成诸杆的各个约束向量（即约束方程的系数组成的向量）。杆件的第一个结点与其余结点之间的约束向量用（4）式来形成。当杆件的第j个结点不与其前两个结

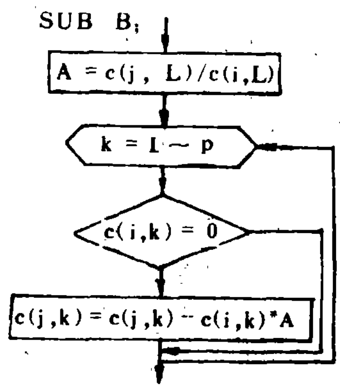
子框图C



SUB A



SUB B



点共线时用（5）式形成约束向量；当杆件的第j个结点与其前两个结点共线时，用（11）式或（12）式来形成约束向量。

子框图C用来进行变换处理。用变量t记录跳列的次数，用数组A记录每次跳列时列号以便推求缺少约束的位置与方向。

参 考 文 献

[1] 钟万勰、丁殿明、程耿东《计算杆系结构力学》水利电力出版社，1982年

[2] 北京大学数学力学系.《高等代数》，人民教育出版社，1978年

A calculation Method and Program of Analysis of Constitution of System

Fan Youjing

(Civil Dept.of Zhenzhou Institute of Technology)

Abstract: In this article, all bars are assumed to be stiff. Varied bars linking n joints are derivated out $(2n-3)$ independent equations. Have the constraint equations' factor matrix been extreme sparse, it is turned to step like equations with primary transformation. By these transformation results, We can know geometirc alterability, redundant constraint number, freedom number of system, and the direction and the joint which freedom take place on

Key words: system, freebom, redundant constraint