

# 含互感网络的对偶性的研究

王俊彪

(郑州工学院电机系)

**提 要:** 本文讨论了含互感网络的对偶性, 给出了两个具有互感耦合的电感线圈的对偶网络及一般含互感网络的对偶规则, 并论证了含互感平面网络存在对偶平面网络的条件, 从而扩大了对偶原理在网络分析中的应用领域。

**关键词:** 互感耦合网络, 对偶网络, 对偶原理。

## 1 含互感网络的对偶网络

图(1)(a)示一具有互感耦合的电感元件, 其端口特性为

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SL_1 & SM \\ SM & SL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

为便于作出对偶网络, 按替代定理在它的二端口各接一个电压分别为 $U_1$ 、 $U_2$ 的独立电压源, 并化成受控源模型得到图(1)(b)所示网络, 利用含受控源网络的对偶规则求得其对偶网络如图(1)(c)所示, 其受控源模型的端口特性为

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\hat{C}_1 & S\hat{C}_M \\ S\hat{C}_M & S\hat{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 $\hat{C}_M$ 为互感系数 $M$ 的对偶参数称为互电容系数。

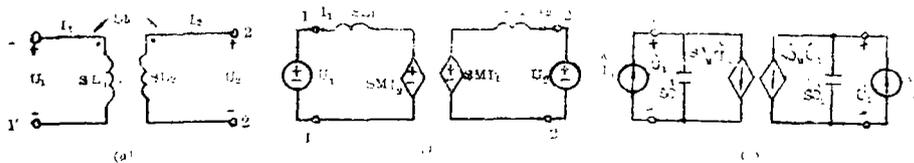


图 1

对比具有互感耦合的电感线圈我们定义一种具有互电容耦合的电容器, 它具有式(2)表示的端口特性, 如图(2)所示, 于是具有互感耦合的电感线圈和具有互电容耦合的电容器互为对偶元件。由于互感耦合的电感线圈是一种磁通耦合元件, 那么互电容耦合的电容器就应是一种电荷耦合元件了。

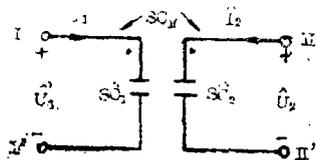


图 2

为了便于讨论含互感网络的对偶性, 我们利用去耦法得出具有互感耦合的电感线圈的无互感等效网络, 再作出其对偶网络以导出具有互电容耦合的电容器的无互电容的等效网络。

先考察图(3)(a)所示网络, 该网络的端口特性为

$$\begin{cases} U_1 = SM I_2 - Z_M I_1 \\ U_2 = SM I_1 = Z_M I_1 \end{cases} \quad (3)$$

显然，待求的图(3)(a)网络的等效网络是一个四端元件，设为一个完全四角形的网络如图(3)(b)所示。

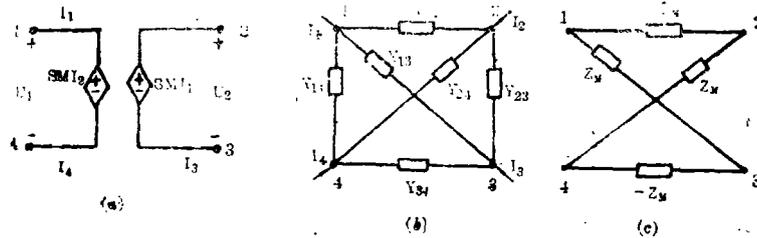


图 3

按节点法可写出该完全四角形网络的节点电压方程为

$$\begin{cases} I_1 = (Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}) U_1' - Y_{12} U_2' - Y_{13} U_3' - Y_{14} U_4' \\ I_2 = -Y_{12} U_1' + (Y_{12} + Y_{23} + Y_{24}) U_2' - Y_{23} U_3' - Y_{24} U_4' \\ I_3 = -Y_{13} U_1' - Y_{23} U_2' + (Y_{13} + Y_{23} + Y_{34}) U_3' - Y_{34} U_4' \\ I_4 = -Y_{14} U_1' - Y_{24} U_2' - Y_{34} U_3' + (Y_{14} + Y_{24} + Y_{34}) U_4' \end{cases} \quad (4)$$

式中 $U_1'$ 、 $U_2'$ 、 $U_3'$ 及 $U_4'$ 分别为节点1、2、3及4的节点电压  
注意到下列关系成立

$$\begin{cases} I_1 + I_4 = 0 \\ I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

将式(4)代入式(5)可得

$$\begin{cases} Y_{12} + Y_{13} = 0 \\ Y_{12} + Y_{24} = 0 \\ Y_{13} + Y_{34} = 0 \\ Y_{24} + Y_{34} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

完全四角形中诸运算导纳满足式(6)的条件，显然这些条件中只有三个条件是独立的。

将式(6)代入式(4)并注意 $U_1 = U_1' - U_4'$ 及 $U_2 = U_2' - U_3'$ 可得

$$\begin{cases} I_1 = Y_{14} U_1 - Y_{12} U_2 \\ I_2 = -Y_{12} U_1 + Y_{23} U_2 \end{cases} \quad (7)$$

比较式(7)与式(3)并考虑到式(6)就可求得完全四角形的诸运算导纳为

$$Y_{14} = Y_{23} = 0$$

$$Y_{12} = Y_{24} = -Y_{13} = -Y_{34} = -\frac{1}{Z_M} = -\frac{1}{SM} \quad (8)$$

于是最后求得的图(3)(a)网络的等效网络如图(3)(c)所示，图中的运算导纳已代换成运算阻抗。

按照图(1)(b),在所得网络中再串联运算阻抗 $Z_{L_1} = SL_1$ 及 $Z_{L_2} = SL_2$ 后就得到具有互感耦合的电感线圈[图(1)(a)]的无互感等效电路如图(4)所示,图(4)网络的对偶网络即为所求的具有互电容耦合的电容器[图(2)]的无互电容的等效网络,如图(5)(a)所示。

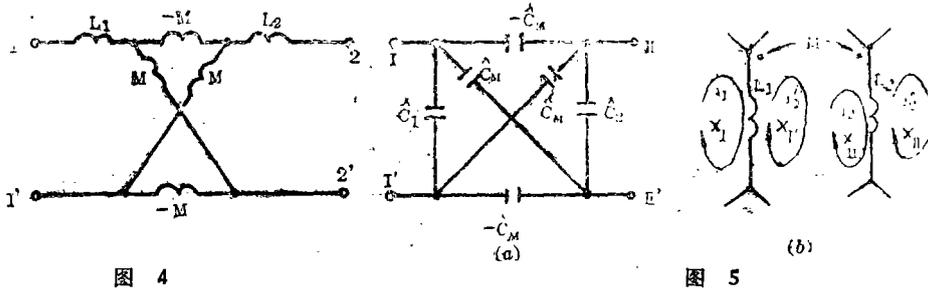


图 4

图 5

如果图(1)(a)中有一个线圈调换一个同名端,则图(5)(a)中的 $\hat{C}_M$ 应换成 $-\hat{C}_M$ 。由于在一般含互感网络中两个具有互感耦合的电感线圈最多可涉及四个网孔电流图(5)(b),这四个网孔对偶图(5)(a)中的四个节点,结构上的对偶关系确定后,于是就可总结出含互感网络的对偶规则如下:

(1) 两个自感 $L_1$ 、 $L_2$ 分别对偶两个电容 $\hat{C}_1$ 、 $\hat{C}_2$

(2) 互感 $M$ 的对偶规则是:当通过两个具有互感耦合的电感线圈的两个网孔电流的参考方向(均取顺时针方向或反时针方向)对该两电感线圈的同名端而言是一致时,在对偶这两个网孔的节点间接一个互电容 $-\hat{C}_M$ ;反之接一个互电容 $+\hat{C}_M$ 。当两个具有互感耦合的电感线圈同向串联而有两个网孔电流通过时,由于这时两个网孔电流的参考方向对该两电感线圈的同名端而言必然是不一致,故应在对偶这两个网孔的节点间接一个互电容 $+\hat{C}_M$ ;反之若两个具有互感耦合的电感线圈反向串联时,则相应的接一个互电容 $-\hat{C}_M$ 。

例一、求图(6)(a)示含互感网络的对偶网络

解:这是一个含互感的平面网络,先作出该平面网络不考虑互感时的对偶网络,它仍是一个平面网络,如图(6)(b)实线所示,再在图(6)(b)的基础上按含互感网络的对偶规则处理互感的对偶。由于网孔电流 $i_1$ 、 $i_2$ 流过 $L_6$ 、 $L_6$ 的方向对同名端一致,故应在图(6)

(b)节点I、II间再接入互电容 $-\hat{C}_M$ ;网孔电流 $i_1$ 、 $i_3$ 流过 $L_6$ 、 $L_6$ 的方向对同名端不一致,故应在图(6)(b)节点I、III间再接入互电容 $+\hat{C}_M$ ;网孔电流 $i_2$ 与外围四路电流 $i_4$ 流过 $L_6$ 、 $L_6$ 的方向对同名端不一致,故应在图(6)(b)节点III、IV间再接入互电容 $+\hat{C}_M$ ;网孔电流 $i_2$ 与外围回路电流 $i_4$ 流过 $L_6$ 、 $L_6$ 的方向对同名端一致,故应在图(6)(b)节点II、IV间再接入互电容 $+\hat{C}_M$ ;网孔电流 $i_3$ 与外围回路电流 $i_4$ 流过 $L_6$ 、 $L_6$ 的方向对同名端一致,故应在图(6)(b)节点III、IV间再接入互电容 $-\hat{C}_M$ ,于是就得到了图(6)(a)含互感

网络的对偶网络(图(6)(b)), 注意到该网络中互电容支路均用虚线表示, 而且它是平面网络。

例二、求图(7)(a)示两个具有互感耦合的电感线圈的串联电路的对偶电路

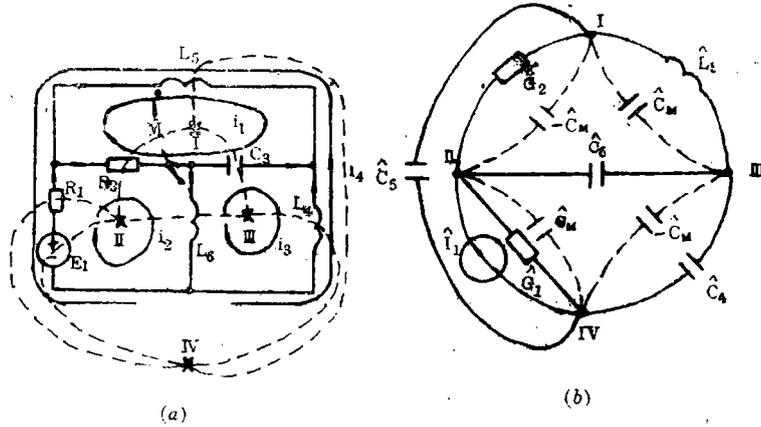


图 6

解: 图(7)(a)示电路是一个单回路电路, 它的对偶电路中有一个独立节点I, 而参考节点0则与外围回路对偶。按上述含互感网络的对偶规则, 由于两个具有互感耦合的电感线圈同向串联, 故应在节点I, O之间接入互电容 $2C_M$ , 于是得到图(7)(b)所示的对偶电路, 其等效电容为 $C_1 + C_2 + 2C_M$ 。再对偶一次就得到图(7)(c)电路的无互感等效电路, 如图(7)(c)所示, 其等效电感为

$L_1 + L_2 + 2M$ , 这一结果是大家熟悉的。

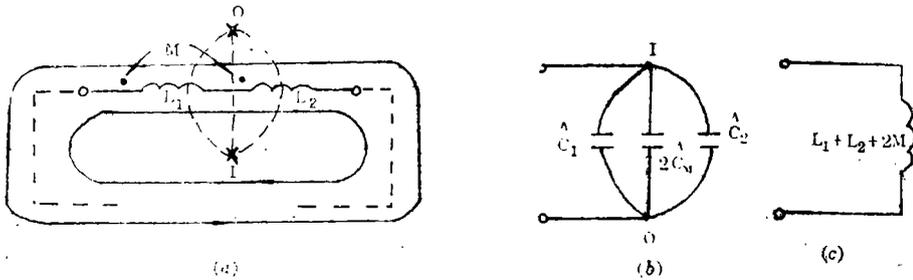


图 7

## 2 含互感平面网络存在对偶平面网络的条件

一个只由独立电压源或电流源、电阻、电容等二端元件组成的、其图是连通的、平面的和非链的网络, 其对偶网络也必然是由上述二端元件组成, 且其图亦是连通的、平面的和非链的网络。图(6)(a)的含互感平面网络其对偶网络也是平面网络, 但一般而言含互感平面网络其对偶网络不一定是平面网络, 只有在特定条件下其对偶网络才是平面网络。下面我们来讨论含互感平面网络存在对偶平面网络的条件。

如果一个含互感平面网络, 在不改变网络的拓扑结构条件下能消去互感变换成无互感的等效网络, 则必然能存在对偶平面网络。但在一般情况下, 含互感网络消去互感变换成无互

感等效网络时, 不仅会改变网络支路的有源和无源元件的参数, 而且会改变网络的拓扑结构。我们来确定含互感网络在不改变网络的拓扑结构能够消去互感的条件。

设一含互感网络有 $b$ 条支路,  $n$ 个节点, 且每对支路间都存在互感。该网络第 $K$ 条支路支路电压与支路电流的关系[图8]

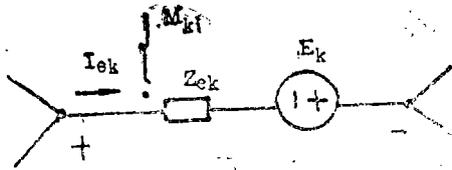


图 8

可写成

$$U_k = \pm SM_{K1}I_{e1} \pm SM_{K2}I_{e2} + \dots + Z_{eK}I_{eK} \pm \dots \pm SM_{Kb}I_{eb} - E_k \quad (9)$$

试考察任意一个由 $S$ 条支路组成的闭合回路方程, 在这方程中, 除了出现组成该回路的 $S$ 个支路

电流外, 还出现不属于该回路的 $b-S$ 个支路电流。因此, 消去互感的问题, 从数学观点看来, 是把回路方程内不属于该回路的一些支路的电流消去。即须把不属于该回路的 $b-S$ 个支路电流用其余 $S$ 个属于该回路的支路电流来表示。但是支路电流服从KCL的约束, 根据KCL只能列出 $n-1$ 个独立方程, 因此含互感网络在不改变网络的拓扑结构能够消去互感的条件为

$$\begin{aligned} b - S &\leq n - 1 \\ \text{或} \quad b - n + 1 &\leq S \end{aligned} \quad (10)$$

即是说, 网络中任一闭合回路的支路数应不小于独立回路数。容易验证图6(a)的含互感网络满足式(10)的条件, 因而其对偶网络是平面网络。

一个含互感复杂网络包含许多不同的回路, 例如图6(a)的网络共有七个不同的回路, 要确定每一个回路是否满足式(10)的条件是很麻烦的, 为此我们根据网络拓扑理论进一步寻求不改变网络的拓扑结构能够消去互感的条件的另一种便于应用的表达方式。

设有一个含互感网络具有 $b$ 条支路 $n$ 个节点, 可写出网孔方程为

$$[Z_M][I_M] = [E_M] \quad (11)$$

其中 $[Z_M] = [M][Z_b][M]^T$ 称为含互感网络的网孔阻抗矩阵, 而 $[E_M] = [M][E - [M][Z_b][I]]$ 称为网孔电动势列向量。

为了便于确定含互感网络的无互感等效网络, 我们将含互感网络的支路阻抗矩阵 $[Z_b]$ 化成两个矩阵和的形式, 在网络每对支路都存在互感的情况下有

$$\begin{aligned} [Z_b] &= \begin{bmatrix} Z_{e1} & \pm SM_{12} & \pm SM_{13} & \dots & \pm SM_{1b} \\ \pm SM_{21} & Z_{e2} & \pm SM_{23} & \dots & \pm SM_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \pm SM_{b1} & \pm SM_{b2} & \pm SM_{b3} & \dots & Z_{eb} \end{bmatrix} \\ &= [Z_e] + [\Delta Z_e] \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$[Z_e] = \text{diag} [Z_{e1}, Z_{e2}, \dots, Z_{eb}] \quad (13)$$

称为不考虑互感时的支路阻抗矩阵, 而

$$[\Delta Z_c] = \begin{bmatrix} 0 & \pm SM_{12} & \pm SM_{13} & \cdots & \pm SM_{1b} \\ \pm SM_{21} & 0 & \pm SM_{23} & \cdots & \pm SM_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \pm SM_{b1} & \pm SM_{b2} & \pm SM_{b3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

称为支路互感阻抗矩阵, 它的对角线上的元素为零, 非对角线上的元素为相应两条支路间的互感阻抗, 且由互易原理有  $M_{ij} = M_{ji}$ 。于是含互感网络的网孔阻抗矩阵  $[Z_M]$  也可表示成两个矩阵和的形式:

$$[Z_M] = [M] [Z_b] [M]^T = [M] [Z_c] [M]^T + [M] [\Delta Z_c] [M]^T \\ = [Z_m] + [\Delta Z_m] \quad (15)$$

其中

$$[Z_m] = [M] [Z_c] [M]^T \quad (16)$$

称为不考虑互感的网孔阻抗矩阵, 而

$$[\Delta Z_m] = [M] [\Delta Z_c] [M]^T \quad (17)$$

称为网孔互感阻抗矩阵, 它的对角线上的元素也为零。

待求的无互感等效网络与原来含互感网络具有相同的拓扑结构, 也用同样的网孔方程表示。为此无互感等效网络的网孔阻抗矩阵  $[Z_M]_{\text{等效}}$  等效和网孔电动势列向量  $[E_M]_{\text{等效}}$  等效, 应相应地等于原来含互感网络的网孔阻抗矩阵  $[Z_M]$  与网孔电动势列向量  $[E_M]$ , 即有

$$[Z_M]_{\text{等效}} = [Z_M] = [Z_m] + [\Delta Z_m] \quad (18)$$

$$[E_M]_{\text{等效}} = [E_M] = [M] [E] - [M] [Z_b] [I] \\ = [M] [E] - [M] [Z_c] [I] - [M] [\Delta Z_c] [I] \quad (19)$$

应用式(18)可以直接决定等效网络的网孔阻抗矩阵  $[Z_M]_{\text{等效}}$ , 按照这矩阵的元素很容易决定出支路阻抗。  $[Z_M]_{\text{等效}}$  中第  $i$  行第  $j$  列的元素等于  $i$ 、 $j$  两网孔的互阻抗, 而位于该矩阵对角线上的元素等于相应网孔的自阻抗。

由于只含互感网络的网孔阻抗矩阵为  $(b-n+1) \times (b-n+1)$  阶对称方阵, 只含有  $(b-n+1) + \frac{(b-n+1)(b-n)}{2} = \frac{(b-n+2)(b-n+1)}{2}$  个独立元素, 根据式18两端对应元素相等只能列出  $\frac{(b-n+2)(b-n+1)}{2}$  个独立方程。而待求无互感等效网络

未知支路阻抗的数目等于网络的支路数  $b$ 。因此, 消除互感的问题有唯一解的条件是

$$\frac{(b-n+2)(b-n+1)}{2} = b \quad (20)$$

也就是含互感平面网络存在对偶平面网络的条件。

满足式(20)的条件, 含互感网络可以在不改变其拓扑结构前提下唯一地求得它的无互感等效网络, 显然, 消除互感引起支路阻抗的改变, 同时从式(19)可以看出, 支路电压源的电动势应保持不变, 但支路电流源的电激流却发生了变化, 支路电流源的电激流列向量变为  $[I] + [\Delta I]$ , 其中

$$[\Delta I] = [\Delta Z_c] [I] \quad (21)$$

当  $\frac{(b-n+2)(b-n+1)}{2} < b$  时, 独立方程数目少于未知支路阻抗的数目, 消除互

感的问题有无限多个解答。在  $\frac{(b-n+2)(b-n+1)}{2} > 6$  时独立方程数目多于未知量的

数目, 因此不改变网络的拓扑结构, 只改变网络的支路阻抗和电源参数不可能消除互感。

图6(a)的含互感网络  $b=6$ ,  $n=4$ , 满足式(20)的条件, 可以在不改变网络的拓扑结构而消除互感, 我们来求出其无互感等效网络的各支路元件的参数。按照图6(a)选定的各支路电流与网孔电流的参考方向可写出网孔矩阵

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

支路互感阻抗矩阵为

$$[\Delta Z_c] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & SM \\ 0 & 0 & 0 & 0 & SM & 0 \end{pmatrix}$$

网孔互感阻抗矩阵为

$$[\Delta Z_m] = [M] [\Delta Z_c] [M]^T = \begin{pmatrix} 0 & SM & -SM \\ SM & 0 & 0 \\ -SM & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不考虑互感的网孔阻抗矩阵为

$$[Z_m] = \begin{pmatrix} R + \frac{1}{SC_3} + SL_5 & -R_2 & -\frac{1}{SC_3} \\ -R_2 & R_1 + R_2 + SL_6 & -SL_6 \\ -\frac{1}{SC_3} & -SL_6 & \frac{1}{SC_3} + SL_4 + SL_5 \end{pmatrix}$$

含互感网络的网孔阻抗矩阵为

$$[Z_M] = [Z_m] + [\Delta Z_m] = \begin{pmatrix} R_2 + \frac{1}{SC_3} + SL_5 & -R_2 + SM & -SM - \frac{1}{SC_3} \\ -R_2 + SM & R_1 + R_2 + SL_6 & -SL_6 \\ -SM - \frac{1}{SC_3} & -SL_6 & \frac{1}{SC_3} + SL_4 + SL_5 \end{pmatrix}$$

设待求无互感等效网络的网孔阻抗矩阵为

$$[Z_M] \text{ 等效} = \begin{pmatrix} Z_2 + Z_3 + Z_6 & -Z_2 & -Z_3 \\ -Z_2 & Z_1 + Z_2 + Z_6 & -Z_6 \\ -Z_3 & -Z_6 & Z_3 + Z_4 + Z_6 \end{pmatrix}$$

式中 $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$ 、 $Z_4$ 、 $Z_5$ 、 $Z_6$ 是等效网络各支路的阻抗。

根据式(18)可得下列方程组:

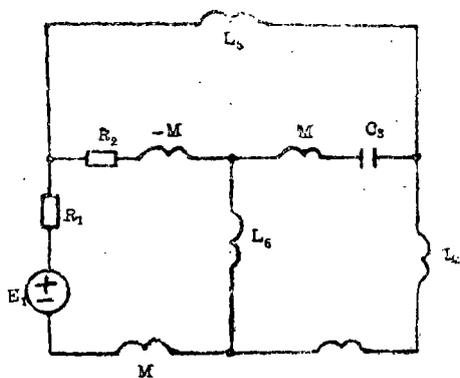


图 9

从而

$$Z_1 = R_1 + SM$$

$$Z_4 = SL_4 - SM$$

$$Z_5 = SL_5$$

$$Z_2 + Z_3 + Z_6 = R_2 + \frac{1}{SC_3} + SL_3$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_6 = R_1 + R_2 + SL_6$$

$$Z_3 + Z_4 + Z_6 = \frac{1}{SC_3} + SL_4 + SL_6$$

$$Z_2 = R_2 - SM$$

$$Z_3 = SM + \frac{1}{SC_3}$$

$$Z_6 = SL_6$$

电源电动势 $E_1$ 在等效网络中保持不变。于是所求的无互感等效网络如图(9)所示,其拓扑结构与原来含互感网络相同。若将图9的平面网络求其对偶网络即得到图6(b)的平面网络,这就证明了本文提出的含互感网络的对偶规则是正确的。

### 3 结 论

本文从含受控源网络的对偶性出发讨论了含互感网络的对偶性,导出了两个具有互感耦合的电感线圈的对偶元件为具有互电容耦合的电容器及其无互电容的等效网络。并进一步总结了含互感网络的对偶规则,还举例说明作含互感网络的对偶网络的方法。最后提出并证明了含互感平面网络存在对偶平面网络的条件为式(10)或式(20),从而比较完整的解决了含互感网络的对偶问题,扩大了对偶原理在网络分析中的应用领域。

### 参 考 文 献

- (1) C.A.狄苏尔葛守仁著,林争辉主译电路基本理论(上册)人民教育出版社1979年
- (2) 陈树柏主编网络图论及其应用科学出版社1982年
- (3) N.Balabanian, T.A.Bickart, "Electrical Network Theory" John Wiley & Sons, Inc 1969.

## Research on the Duality of Mutual-inductance Coupled Network

Wang junkun

(Electrical Engineering Department)

**Abstract** This paper discusses the duality of ordinary mutual-inductance coupled network and elucidates the conditions for the existence of the dual planar network in the mutual-inductance coupled network, thus expanding the application of the principle of duality in network analysis.

**Keywords:** mutual-inductance coupled network, dual network, principle of duality.