郑州工学院学报
第9卷 第4期 JOURNAL OF ZHENGZHOU INSTITUTE OF TECHNOLOGY Vol.9, NO.4
1988年12月 December 1988

任意集中载荷作用下角支矩形板的弯曲

杨国战

（大连工学院力学所）

提 要：本文引用广义简支边的概念并应用迭加法，解任意集中载荷作用下角支矩形板的弯曲，并给出数值例子。

关键词：集中载荷，简支边界，弯曲

1 引 言

矩形板在四角顶被支承的弯曲问题，张福范教授在文[1]中研究了在板的平面内受均布载荷作用下的情形，林鹏程同志在文[2]中研究了有一集中力作用在板的中线上任一点（a/2, n）的情形。本文考虑有一集中力作用于板上任一点（ξ, n）时的弯曲，此时问题归结为：

在板的边界内，挠度W须满足偏微分方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{P\delta\ (x-\xi,\ y-n)}{D}$$

其中D为抗弯刚度，δ为Dirac函数，并满足边界条件：

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}=0,\qquad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-u)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}=0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{\substack{y=0\\y=b}}=0,\qquad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right]_{\substack{y=0\\y=b}}=0,$$

引用广义简支边的概念，并应用迭加法解此问题。

2 叠加的组成部分

（A）、四边简支的矩形板，在（ξ, η）点作用有集中力P，引用文[3]的结果，其挠度为：

$$w_1=\sum_{m=1}\sum_{n=1}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{1}$$

其中：
$$A_{mn}=\frac{4p}{\pi^4 abD\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\cdot\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi h}{b};$$

本文1987年11月17日收到

令： $B_{mn}=\frac{[m^3+(2-\mu)mn^2q^2]}{[m^2+n^2q^2]^2}\cdot\sin\frac{m\pi\xi}{a}\cdot\sin\frac{n\pi h}{b}$

$C_{mn}=\frac{[n^3+(2-\mu)nm^2/q^2]}{[m^2/q^2+n^2]^2}\cdot\sin\frac{m\pi\xi}{a}\cdot\sin\frac{n\pi h}{b}$

$q=\frac{a}{b}$

则有：

$$(V_x)_{x=0}=\frac{4p}{\pi b}\sum_{i=1}\sum_{j=1}B_{ij}\sin\frac{j\pi y}{b} \tag{2}$$

$$(V_x)_{x=a}=\frac{4p}{\pi b}\sum_{i=1}\sum_{j=1}B_{ij}\cos i\pi\cdot\sin\frac{j\pi y}{b} \tag{3}$$

$$(V_y)_{y=0}=\frac{4p}{\pi a}\sum_{i=1}\sum_{j=1}C_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a} \tag{4}$$

$$(V_y)_{y=b}=\frac{4p}{\pi a}\sum_{i=1}\sum_{j=1}C_{ij}\cos j\pi\cdot\sin\frac{i\pi x}{a} \tag{5}$$

(B)、$x=a$边为广义简支边，其余三边为简支，

且，$(W_2)_{x=a}=\sum_{c=1}b_i\sin\frac{i\pi y}{b}$

于是得其挠度为[4]：

$$W_2=\frac{1-\mu}{2}\sum_{i=1}\frac{b_i}{sh\beta_i}\{(\frac{2}{1-\mu}+\beta_i\coth\beta_i)\cdot sh\frac{i\pi x}{b}-\frac{i\pi x}{b}\cosh\frac{i\pi x}{b}\}\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{6}$$

$$(V_x)_{x=0}=\frac{D(1-\mu)^2\pi^3}{2b^3}\sum_{i=1}\frac{i^3b_i}{sh\beta_i}(\frac{3+\mu}{1-\mu}+\beta_i\coth\beta_i)\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{7}$$

$$(V_x)_{x=a}=D\frac{(1-\mu)^2\pi^3}{2b^3}\sum_{i=1}i^3b_i(\frac{\beta_i}{sh^2\beta_i}+\frac{3+\mu}{1-\mu}\coth\beta)\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{8}$$

$$(V_y)_{y=b}=-D(1-\mu)^2\frac{2\pi^2}{b^3}\sum_{i=1}\sum_{m=1}\frac{b_i\cdot\cos\pi i}{i}\frac{m^3\cos m\pi}{(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2})^2}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{9}$$

$$(V_y)_{y=0}=-D(1-\mu)^2\frac{2\pi^2}{b^3}\sum_{i=1}\sum_{m=1}\frac{b_i}{i}\frac{m^3\cos m\pi}{(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2})^2}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{10}$$

(C)、$x=0$边为广义简支边，其余三边为简支边，

且：$(W_3)_{x=0}=\sum_{i=1}C_i\sin\frac{i\pi y}{b}$

可得其挠度为：

$$W_3=\sum_{i=1}C_i\Big[\Big(-\frac{1-\mu}{2}\frac{\beta_i}{sh^2\beta_i}-\coth\beta_i\Big)sh\frac{i\pi x}{b}-\frac{1-\mu}{2}\frac{i\pi x}{b}sh\frac{i\pi x}{b}+\cosh\frac{i\pi x}{b}$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\coth\beta\cdot\frac{i\pi x}{b}\cdot\cosh\frac{i\pi x}{b}\Big]\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{11}$$

$$(V_x)_{x=0}=-D\frac{(1-\mu)^2\pi^3}{2b^3}\sum_{i=1}i^3C_i\Big[\frac{3+\mu}{1-\mu}\coth\beta_i+\frac{\beta_i}{sh^2\beta_i}\Big]\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{12}$$

$$(V_x)_{x=a}=-D\frac{(1-u)^2\pi^3}{2b^3}\sum_{i=1}i^3C_i\frac{1}{sh\beta_i}\Big[\frac{3+u}{1-u}+\beta_i\coth\beta_i\Big]\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{13}$$

$$(V_y)_{y=b}=\frac{2D(1-u)^2\pi^2}{b^3}\sum_{i=1}\sum_{m=1}\frac{m^3c_i\cdot\cos i\pi}{i\left(\frac{m^2}{i^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\cdot\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{14}$$

$$(V_y)_{y=0}=\frac{2D(1-u)^2\pi^2}{b^3}\sum_{i=1}\sum_{m=1}\frac{m^3c_i}{i\cdot\left(\frac{m^2}{i^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{15}$$

(D)、$y=b$边为广义简支边，其余三边为简支边

且：$(W_4)_{y=b}=\sum_{i=1}d_i\sin\frac{i\pi x}{a}$

可得其挠度为

$$W_2=\frac{1-u}{2}\sum_{i=1}\frac{d_i}{sh\alpha_i}\Big[\Big(\frac{2}{1-u}+\alpha_i\coth\alpha_i\Big)sh\frac{i\pi y}{a}-\frac{i\pi y}{a}\cdot\cosh\frac{i\pi y}{a}\Big]\sin\frac{i\pi x}{a} \tag{16}$$

$$(V_x)_{x=0}=-D(1-u)^2\frac{2\pi^2}{a^3}\sum_{i=1}\frac{d_i}{i}\sum_{m=1}\frac{m^3\cos m\pi}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi y}{b} \tag{17}$$

$$(V_x)_{x=a}=-D(1-u)^2\frac{2\pi^2}{a^3}\sum_{i=1}\sum_{m=1}\frac{d_i\cos i\pi}{i}\cdot\frac{m^3\cos m\pi}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi y}{b} \tag{18}$$

$$(V_y)_{y=b}=\frac{D(1-u)^2}{2}\frac{\pi^3}{a^3}\sum_{i=1}i^3d_i\Big[\frac{\alpha_i}{sh^2\alpha_i}+\frac{3+u}{1-u}\coth\alpha_i\Big]\sin\frac{i\pi x}{a} \tag{19}$$

$$(V_y)_{y=0}=\frac{D(1-u)^2}{2}\frac{\pi^3}{a^3}\sum_{i=1}\frac{i^3d_i}{sh\alpha_i}\Big[\frac{3+u}{1-u}+\alpha_i\coth\alpha_i\Big]\sin\frac{\pi x}{a} \tag{20}$$

E)、$y=0$ 边 为广义简支边，其余三边为简支边，且：$(W_5)_{y=0}=\sum_{i=1}e_i\sin\frac{i\pi x}{a}$

于是可得：

$$W_5=\sum_{i=1}e_i\left[\left(-\frac{1-u}{2}\frac{\alpha_i}{sh^2\alpha_i}-\coth\alpha_i\right)sh\frac{i\pi y}{a}-\frac{1-u}{2}\cdot\frac{i\pi y}{a}\cdot sh\frac{i\pi y}{a}+\cosh\frac{i\pi y}{a}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-u}{2}\coth\alpha\cdot\frac{i\pi y}{a}\cdot\cosh\frac{i\pi y}{a}\right]\sin\frac{i\pi x}{a} \qquad (21)$$

$$(V_x)_{x=0}=\frac{2D(1-u)^2\pi^2}{a^3}\sum_{i=1}\sum_{m=1}\frac{m^3e_i}{i\left(\frac{m^2}{i^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad (22)$$

$$(V_x)_{x=a}=\frac{2D(1-u)^2\pi^2}{a^3}\sum_{i=1}\sum_{m=1}\frac{m^3e\cos i\pi}{i\left(\frac{m^2}{i^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad (23)$$

$$(V_y)_{y=b}=-D\frac{(1-u)^2}{2}\frac{\pi^3}{a^3}\sum_{i=1}\frac{i^3e}{sh\alpha_i}\left[\frac{3+u}{1-\mu}+\alpha i\coth\alpha\right]\sin\frac{i\pi x}{a} \qquad (24)$$

$$(V_y)_{y=0}=-D\frac{(1-u)^2}{2}\frac{\pi^3}{a^3}\sum_{i=1}i^3e\left[\frac{3+u}{1-u}\coth\alpha_i+\frac{\alpha_i}{sh\alpha_i}\right]\sin\frac{i\pi x}{a} \qquad (25)$$

在以上（B）、（C）、（D）、（E），中的b_i、c_i、d_i、e_i是未知的，通过满足边界条件确定它们的值。

3　用叠加法解角支板的弯曲

为了满足沿x＝0边的剪力为零，则叠加（2）、（7）、（12）、（17）、（22）式，并使其总和为零，可得：

$$\frac{i^3b_i}{sh\beta_i}\left(\frac{3+u}{1-u}+\beta_i\coth\beta_i\right)-i^3C_i\left(\frac{3+u}{1-u}\coth\beta_i+\frac{\beta_i}{sh^2\beta_i}\right)-\frac{4}{\pi}\frac{b^3}{a^3}\cdot\sum_{m=1}$$

$$\frac{d_m\cdot i^3\cos i\pi}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}+\frac{4}{\pi}\frac{b^3}{a^3}\sum_{m=1}\frac{e_m i^3}{m\left(\frac{i^2}{m^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)^2}=\frac{pb^2}{D}\cdot\frac{-8}{(1-u)^2\pi^4}\sum_j B_{ji} \qquad (26)$$

沿着x＝a边的剪力为零，则叠加（3）、（8）、（13）、（18）、（22）式，并使其总和为零，可得：

$$i^3b\left(\frac{\beta_i}{sh^2\beta}+\frac{3+u}{1-u}\coth\beta_i\right)-\frac{c_c\cdot i^3}{sh\beta_c}\left(\frac{3+u}{1-u}+\beta_i\coh\beta_i\right)-\frac{4}{\pi}\frac{b^3}{a^3}\sum_{m=1}\frac{d_m\cos m\pi}{m}\cdot$$

$$\cdot\frac{i^3\cos i\pi}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}+\frac{4}{\pi}\frac{b^3}{a^3}\sum_{m=1}\frac{i^3e_m\cos m\pi}{m\left(\frac{i^2}{m^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)^2}=\frac{pb^2}{D}\cdot\frac{-8}{(1-u)^2\pi^4}\sum_j B_{ji}\cos j\pi \qquad (27)$$

沿着y＝b边的剪力为零，则叠加（5）、（9）、（14）、（19）、（24）式，并使其总和为零，可得：

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}\frac{b_m\cos m\pi}{m}\cdot\frac{i^3\cos i\pi}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}\frac{i^3C_m\cos m\pi}{m\left(\frac{i^2}{m^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}+\frac{b^3}{a^3}\cdot i^3d_i\left(\frac{\alpha_i}{\mathrm{sh}^2\alpha_i}+\frac{3+u}{1-u}\coth\alpha_i\right)-\frac{b^3}{a^3}e_i\frac{i^3}{\mathrm{sh}\alpha_i}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}+\alpha_i\coth\alpha_i\right)=\frac{pb^2}{D}\frac{-8q}{(1-\mu)^2\pi^4}\sum_j C_{ij}\cos j\pi \quad (28)$$

沿着$y=0$边的剪力为零，则叠加（4）、（10）、（15）、（20）、（25）式，并使其总和为零，可得：

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}\frac{b_m}{m}\frac{i^3\cos i\pi}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}\frac{i^3C_m}{m\left(\frac{i^2}{m^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}+\frac{b^3}{a^3}\frac{i^3d_i}{\mathrm{sh}\alpha_i}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}+\alpha_i\coth\alpha_i\right)+-\frac{b^3}{a^3}i^3e_i\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}\cot\alpha_i+\frac{\alpha_i}{\mathrm{sh}^2\alpha_i}\right)=\frac{pb^2}{D}\frac{-8q}{(1-\mu)^2\pi^4}\sum_j C_i \quad (29)$$

在式（26）～（29）中，取$i=1, 2, \cdots\cdots$；$m=1, 2, \cdots\cdots$。这样我们就得到四个联立无穷方程组，从式（26）～（29）式解出b_i、c_i、d_i、e_i，就可以求得所需的挠度和的弯矩等。

4　数值例子

现在考虑一正方形板四角被支承的情形，此时取$a=b$，集中力作用在（ξ，h）处，取定μ、b_i、c_i、d_i、e_i各取25项，下面列出解方程（26）～（29）的计算结果，只写出$\mu=0.3$，

$\xi=0.25$，$\eta=0.25$时b_i、c_i、d_i、e_i的值（单位为：$\frac{pa^2}{D}$）：

b_i	c_i	d_i	e_i
1.15545×10^{-2}	2.63267×10^{-2}	1.15545×10^{-2}	2.63268×10^{-2}
3.66523×10^{-4}	2.39761×10^{-3}	3.66427×10^{-4}	2.39843×10^{-3}
1.00534×10^{-4}	3.83703×10^{-4}	1.00096×10^{-4}	3.83552×10^{-4}
4.73433×10^{-6}	2.90405×10^{-5}	6.12723×10^{-6}	2.91290×10^{-5}
5.73504×10^{-6}	1.59285×10^{-5}	7.18345×10^{-6}	1.57609×10^{-5}
3.07054×10^{-5}	4.48836×10^{-6}	-2.15937×10^{-6}	4.48981×10^{-6}
1.772103×10^{-6}	8.00340×10^{-6}	1.60928×10^{-6}	7.76192×10^{-6}
3.57017×10^{-7}	2.52313×10^{-6}	4.06842×10^{7}	2.61981×10^{-6}
1.85872×10^{-6}	2.54766×10^{-6}	1.83421×10^{-6}	2.54945×10^{-6}
8.12357×10^{-7}	4.64950×10^{-7}	7.46774×10^{-7}	4.11409×10^{-7}
9.14254×10^{-7}	1.10877×10^{-6}	9.18476×10^{-7}	1.09773×10^{-6}
7.43184×10^{-8}	5.61836×10^{7}	2.90327×10^{-8}	5.32568×10^{-7}
9.74427×10^{-8}	1.00256×10^{-6}	9.07289×10^{-8}	1.00447×10^{-9}

-1.86293×10^{-7}	5.59566×10^{-7}	-1.95821×10^{-7}	5.68216×10^{-7}
4.74268×10^{-8}	5.95285×10^{-7}	5.41884×10^{-8}	5.86860×10^{-7}
2.45599×10^{-8}	1.90818×10^{-7}	1.94680×10^{-8}	1.95746×10^{-7}
1.94068×10^{-7}	1.94767×10^{-7}	1.98791×10^{-7}	1.89550×10^{-7}
1.14180×10^{-7}	1.74141×10^{-8}	1.14008×10^{-7}	1.93778×10^{-8}
1.29691×10^{-7}	1.25769×10^{-7}	1.35149×10^{-7}	1.23831×10^{-7}
1.04168×10^{-8}	8.21601×10^{-8}	1.08414×10^{-8}	9.29503×10^{-8}
8.36325×10^{-9}	1.70828×10^{-7}	1.05421×10^{-8}	1.67500×10^{-7}
-4.16085×10^{-8}	1.08300×10^{-7}	-4.08888×10^{-8}	1.14465×10^{-7}
5.34771×10^{-9}	1.21146×10^{-7}	5.34759×10^{-9}	1.17022×10^{-7}
5.14573×10^{-9}	4.10603×10^{-8}	5.77265×10^{-9}	4.20330×10^{-8}
4.69051×10^{-8}	4.34647×10^{-8}	4.74925×10^{-8}	4.27977×10^{-8}

由以上数值结果可以看出：$\frac{b_{25}}{b_1}=4.0594\times10^{-6}$，$\frac{c_{25}}{c_1}=1.65090\times10^{-6}$，$\frac{d_{25}}{d_1}=4.1105\times10^{-6}$，$\frac{e_{25}}{e_1}=1.6234\times10^{-6}$，$b_i$、$c_i$、$d_i$、$e_i$是收敛的，前三项是主项，在主项之后，$b_i$、$d_i$收敛较慢，如：$b_{25}=4.69051\times10^{-8}>b_{24}=5.14573\times10^{-9}$，$d_{25}=4.74952\times10^{-8}$）$>d_{24}=5.77265\times10^{-9}$。相对地讲，$c_i$和$e_i$收敛较快。

下面计算板中各点的挠度，把已算得的b_i、c_i、d_i、e_i的值代入式（6）、（11）、（16）、（21）并与公式（1）相加，可得挠度的渐近解析解：

$$
\begin{aligned}
w &= \sum_{j=1}^{5} w_i \\
&= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}+\frac{1-\mu}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{b_i}{sh\beta_i}\Big[\Big(\frac{2}{1-\mu}+\beta_i\coth\beta_i\Big)sh\frac{i\pi x}{b} \\
&\quad -\frac{i\pi x}{b}\cosh\frac{i\pi x}{b}\Big]\sin\frac{i\pi y}{b}+\sum_{i=1}^{N}c_i\Big[\Big(-\frac{1-\mu}{2}\frac{\beta_i}{sh^2\beta_i}-\coth\beta_i\Big)sh\frac{i\pi x}{b}+\frac{1-\mu}{2} \\
&\quad \frac{i\pi x}{b}sh\frac{i\pi x}{b}+\cosh\frac{i\pi x}{b}+\frac{1-\mu}{2}\coth\beta_i\cdot\frac{i\pi x}{b}\cdot\cosh\frac{i\pi x}{b}\Big]\sin\frac{i\pi y}{b}+\frac{1-\mu}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{sh\alpha_i}\Big[\Big(\frac{2}{1-\mu} \\
&\quad +\alpha_i\coth\alpha_i\Big)sh\frac{i\pi y}{b}-\frac{i\pi y}{a}\cosh\frac{i\pi y}{a}\Big]\sin\frac{i\pi x}{a}+\sum_{i=1}^{N}e_i\Big[\Big(1-\frac{1-\mu}{2}\frac{\alpha_i}{sh^2\alpha_i} \\
&\quad -\coth\alpha_i\Big)sh\frac{i\pi y}{a}-\frac{1-\mu}{2}\frac{i\pi y}{a}sh\frac{i\pi y}{a}+\cosh\frac{i\pi y}{a}+\frac{1-\mu}{2}\coth\alpha_i\cdot\frac{i\pi y}{a}\cdot\cosh\frac{i\pi y}{a}\Big] \\
&\quad \sin\frac{\pi x i}{a}
\end{aligned}
$$

表1、表2列出了几种情况下板上几个点的挠度值。从表1和表2可以看出，当载荷作用在

点（0.25a，0.25a）和点（0.3a，0.3a）时，挠度的最大值分别发生在（0.25a，0.25 a）和（0.25，0.5a）处，其最大挠度值分别为：$3.06536\times10^{-2}\frac{pa^2}{D}$和$3.15436\times10^{-2}\frac{pa^2}{D}$

最后计算沿板边的弯矩。由公式：

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

可得沿板的四边的弯矩为：

$$(M_y)_{x=a} = \frac{D(1-\mu^2)}{a^2}\sum_{i=1} i^2 b_i \sin\frac{i\pi y}{b}$$

$$(M_y)_{x=0} = \frac{D(1-\mu^2)}{a^2}\sum_{i=1} i^2 c_i \sin\frac{i\pi y}{b}$$

$$(M_x)_{y=b} = \frac{D(1-\mu^2)}{a^2}\sum_{i=1} i^2 d_i \sin\frac{i\pi x}{a}$$

$$(M_x)_{y=0} = \frac{D(1-\mu^2)}{a^2}\sum_{i=1} i^2 e_i \sin\frac{i\pi x}{a}$$

表3和表4列出了两种情况下沿板边几个点的弯矩值。由表4可以看出当载荷作用在（0.25a，0.25a）时，板边的最大弯矩值发生在（0.25a，0）和（0，0.25a）处，其值为$2.74037\times10^{-2}p$；由表3可以看出，当载荷作用在（0.3a，0.3a）时，最大弯矩值发生在（0.25a，0）和（0，0.25a）处，其值为$2.5060\times10^{-2}p$。

文[2]是本文的特例，此时$\xi=0.5a$。计算在$\mu=0.2$，$\xi=0.5a$，$\eta=0.5a$时的结果与文[2]的相应结果进行比较，如表5，可以看到本文的结果与之相符合。

表1：

$\mu=0.25$，$\xi=0.25a$，$\eta=0.25a$时板的挠度w（单位：pa^2/D）：

x \ y	0.00	0.25a	0.50a	0.75a	1.00a
0.00	0.00000	2.08254×10^{-2}	2.53868×10^{-2}	1.61320×10^{-3}	1.9294×10^{-9}
0.25a		3.06536×10^{-2}	2.93299×10^{-2}	2.04312×10^{-2}	8.65750×10^{-3}
0.50a	对称		2.76956×10^{-2}	2.05590×10^{-2}	1.15277×10^{-2}
0.75a				1.55371×10^{-2}	7.92312×10^{-3}
1.00a					1.20371×10^{-9}

表2

$\mu=0.25$，$\xi=0.3a$，$\eta=0.3a$时板的挠度w（单位：$\frac{pa^2}{D}$）：

x \ y	0.00	0.25a	0.50a	0.75a	1.00a
0.00	0.00000	2.05649×10^{-2}	2.61690×10^{-2}	1.70130×10^{-2}	$1.26581\times$
0.25a		3.14024×10^{-2}	3.15436×10^{-2}	2.22323×10^{-2}	9.40362×10^{-3}
0.50a	对称		3.05492×10^{-2}	2.28074×10^{-2}	1.28108×10^{-2}
0.75a				1.73827×10^{-2}	8.91940×10^{-2}
1.00a					1.39031×10^{-9}

表3

$\mu=0.25$，$\xi=0.3a$，$\eta=0.3a$时板四边的弯矩值（单位为p）：

边界 \ y或x	0.00	0.25a	0.50a	0.75a	1.00a	弯矩
x=a	0.00000	1.19139×10^{-2}	1.17207×10^{-2}	5.57925×10^{-3}	1.83983×10^{-9}	My
x=0	0.00000	2.50579×10^{-2}	2.31149×10^{-2}	1.18710×10^{-2}	1.48409×10^{-9}	My
y=b	0.00000	9.70950×10^{-3}	1.16419×10^{-2}	7.91772×10^{-3}	1.09888×10^{-9}	M_x
y=0	0.00000	2.50608×10^{-2}	2.31248×10^{-2}	1.18828×10^{-2}	1.41775×10^{-9}	M_x

表4

$\mu=0.25$，$\xi=0.25a$，$\eta=0.25a$时板四边的弯矩值（单位：p）：

边界 \ y或x	0.00	0.25a	0.50a	0.75a	1.00a	弯矩
x=a	0.00000	9.31354×10^{-3}	1.01823×10^{-2}	7.43935×10^{-3}	7.20345×10^{-10}	My
x=0	0.00000	2.74377×10^{-2}	2.10472×10^{-2}	1.03123×10^{-2}	1.30993×10^{-9}	My
y=b	0.00000	9.95702×10^{-3}	1.02052×10^{-2}	6.78505×10^{-3}	9.43747×10^{-10}	M_x
y=0	0.00000	2.74374×10^{-2}	2.10540×10^{-2}	1.03243×10^{-2}	1.52540×10^{-9}	M_x

表 5

$\mu=0.2$，$\xi=0.5a$，$\eta=0.5a$时文[2]和本文算得的挠度w（单位$\frac{pa^2}{D}$）：

结果来源	y \ x	0.125	0.25	0.375	0.50
文〔2〕	0.0	0.883591×10^{-2}	0.161657×10^{-1}	0.221006×10^{-1}	0.227008×10^{-1}
本文yx	0.0	0.916471×10^{-2}	0.167727×10^{-1}	0.218223×10^{-1}	0.236086×10^{-1}

参考文献

〔1〕：张福范，矩形板角顶被支承的问题，清华大学学报，9，5（1962）。
〔2：林鹏程，在集中载荷作用下角支矩形板的弯矩，应用数学和力学，5，3（1984）
〔3〕：徐芝伦《弹性力学》下册，人民教育出版社（1979）24[
〔4〕：张福范，悬臂矩形板的不对称弯曲，固体力学学报，2，1980。

Bending of Corner—Supported Rectangu lar Plate Under Arbitrary Concentrated Load

Yang Guozhan

(Dalian Institute of Techonlogy, Liaoning)

Abstract: In this paper the solution for the bending of corner-support ed rectangular plate under arbitrary concentrated load at any point (ξ, η) is given by means of a conception called modified simply suppor ted edges and the method of superposition. Some numerical examples are presented.

Keywords: Concentrated load, simple boundary, bending