

T梁结构翼缘有效宽度力学分析及讨论

郭 乐 工

(土建系)

提 要: 本文通过对不同梁高跨比的T梁翼缘有效宽度的力学分析, 给出了考虑横向剪切变形影响的T梁结构翼缘有效宽度取值公式。对本文公式的讨论表明: T梁结构翼缘有效宽度不是常数, 而随梁的不同高跨比、宽跨比、梁高与翼缘厚度比、梁跨度与翼缘厚度比及材料泊松比变化而改变; 文献[1]的公式为本文公式当梁高跨比趋于零时的特例。

关键词: T梁结构翼缘有效宽度, 剪切变形, 梁高跨比

1 引 言

T梁结构在土木工程、船舶工程中有广泛应用, 其翼缘有效宽度的合理取值关系到梁承载能力的确定。自1923年T.V.Karman首先求解T梁翼缘有效宽度以来(见文献[1]), 翼缘有效宽度取值成为工程界力学界长期讨论的问题。文献[1]认为翼缘有效宽度取值仅与泊松比有关, 文献[2]、[3]、[4]、[5]、[6]则将翼缘有效宽度取为定值。此外, 在上述文献中, 未考虑剪切变形对翼缘有效宽度的影响, 缺乏翼缘有效宽度随梁高跨比等诸参数变化而改变的力学分析。针对上述问题, 本文通过T梁结构翼缘有效宽度的力学分析, 考察了剪切变形影响, 给出了考虑不同梁高跨比等诸参数的T梁结构翼缘有效宽度取值公式并进行若干讨论。

2 基本公式

2.1 基本假设

2.1.1 假设一: 考察图1示T梁, 设梁翼缘无限大, 其厚度远比梁高为小, 故不计翼缘的薄板弯曲作用。当梁弯曲时, 翼缘应力沿厚度均匀分布, 不计体力, 又设该梁为无限多跨连续梁, 支座等距, 各跨作用荷载相等且对称跨中。可取任一跨某一支座为坐标原点, X轴沿梁轴线方向。梁关于X轴对称, 故考察翼缘的一半。

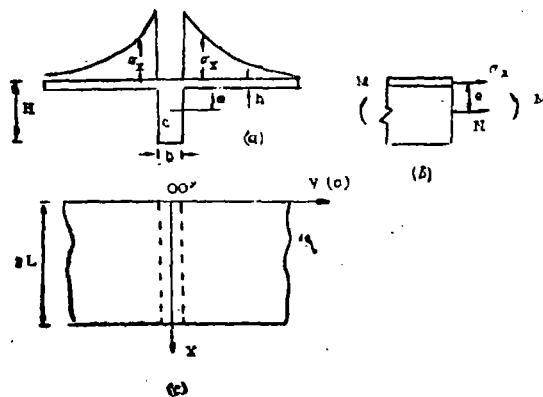


图1 $A=bH$ $I=bH^3/12$ $e=H/2$

本文1988年4月13日收到。

在上述假设下,翼缘内应力分布按弹性力学平面应力问题求解,梁肋部则按考虑横向剪切变形梁理论确定应力分布。

2.1.2 假设二:考察图2示等效T梁。设梁翼缘宽度 2λ ,梁高跨比 $H/2L \leq \frac{1}{3}$,其余截面尺寸同图1示T梁。又设梁肋部正应力 σ_x 沿截面高度线性分布。其余假设同图1示T梁。

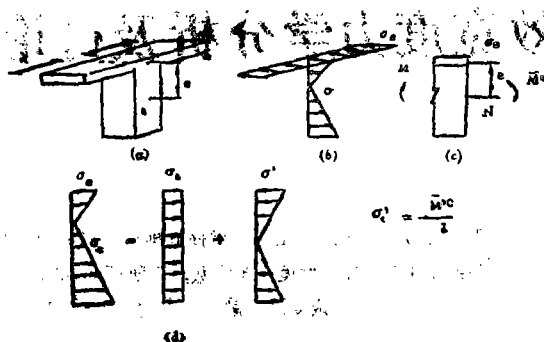


图2

在上述假设下,翼缘应力均匀分布,梁肋部正应力 σ_x 按材料力学公式确定。

2.1.3 假设三:考察图3示等效T形深梁。设翼缘宽度 2λ , $\frac{H}{2L} \geq \frac{1}{3}$ 。各跨作用均布荷载 q 。其余假设同图1示T梁。

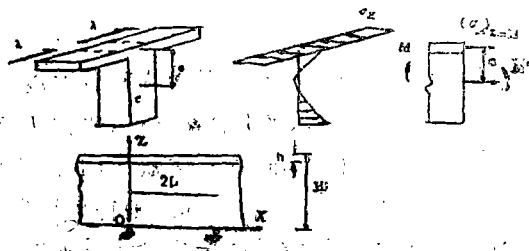


图3

在上述假设下,翼缘应力均匀分布,梁肋部应力按平面应力问题求解。

在图1,图2,图3中, M 为梁截面总弯矩, $M = M' + M'' = \bar{M}' + \bar{M}''$ 。 M' 、 M'' 分别为图1、图2、图3梁肋部应力产生的弯矩。 \bar{M}' 、 \bar{M}'' 分别为图1,图2,图3梁翼缘应力合力与肋部应力合力产生的弯矩。

2.2 解法与公式

2.2.1 对于图1示T梁,在假设一下,其翼缘应力

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

其中应力函数 ϕ 应满足四阶微分方程

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2)$$

$$\text{取 } \phi = \sum_{n=1}^{\infty} f(y) \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),得

$$f(y) = A_n e^{-\frac{n\pi y}{L}} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{L}\right) e^{-\frac{n\pi y}{L}} + C_n e^{\frac{n\pi y}{L}} + D_n \left(1 + \frac{n\pi y}{L}\right) e^{\frac{n\pi y}{L}}$$

由应力边界条件 $y \rightarrow \infty$, 应力为零

有 $C_n = D_n = 0$

$$\text{则 } f(y) = A_n e^{-\frac{n\pi y}{L}} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{L}\right) e^{-\frac{n\pi y}{L}} \quad (4)$$

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{-\frac{n\pi y}{L}} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{L}\right) e^{-\frac{n\pi y}{L}} \right] \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (5)$$

翼缘应变余能 V_1^*

$$\begin{aligned} V_1^* &= 2 \cdot \frac{h}{2E} \int_0^{\infty} \int_0^{2L} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y) dx dy \\ &= 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^3}{L^2} \left(\frac{B_n^2}{E} + \frac{A_n B_n}{2G} + \frac{A_n^2}{2G} \right) \end{aligned}$$

$$\text{令 } X_n = 2h \frac{n\pi}{L} A_n, \quad Y_n = 2h \frac{n\pi}{L} B_n$$

$$\therefore V_1^* = \frac{\pi}{2hE} \sum_{n=1}^{\infty} n [X_n^2 + Y_n^2 + (1+\mu)X_n Y_n] \quad (6)$$

μ 为材料的泊松比。

对于图1示T梁肋部, 设梁跨度上弯矩分布可展为三角级数, 则取任一截面的总弯矩为

$$M = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (7)$$

其中 M_0 是与支座弯矩有关的超静定量。 M_n 可由荷载条件算得。

梁任一截面的力平衡关系式为

$$N + 2h \int_0^{\infty} (-\sigma_x) dy = 0 \quad (8)$$

$$M' + 2he \int_0^{\infty} (-\sigma_x) dy = M \quad (9)$$

$$\text{有 } N = 2h \int_0^{\infty} \sigma_x dy = 2h \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = 2h \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_0^{\infty}$$

$$= 2h \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right) A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$\text{即 } N = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M' &= M + 2he \int_0^{\infty} \sigma_x dy = M + e \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{L} \\ &= M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n) \cos \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \quad (11)$$

设Q为梁肋部剪力合力, 则有

$$Q = \frac{dM'}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi}{L}\right) (M_n + eX_n) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (12)$$

所以, 梁肋部应变余能 V_2^*

$$\begin{aligned} V_2^* &= \int_0^{2L} \frac{N^2}{2AE} dx + \int_0^{2L} \frac{M'^2}{2EI} dx + \int_0^{2L} \frac{Q^2}{2GkA} dx \\ &= \frac{L}{2EA} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{M_0^2 L}{EI} + \frac{L}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2GkAL} \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 (M_n + eX_n)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

∴ 总应变余能

$$\begin{aligned} V^* &= V_1^* + V_2^* \\ &= \frac{\pi}{2hE} \sum_{n=1}^{\infty} n [X_n^2 + Y_n^2 + (1+\mu)X_n Y_n] + \frac{L}{2EA} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{M_0^2 L}{EI} \\ &\quad + \frac{L}{2EI} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2 + \frac{\pi^2}{2GkAL} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (M_n + eX_n)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

应用最小功原理 $\delta V^* = 0$, 即

$$\frac{\partial V^*}{\partial M_0} = 0, \quad \frac{\partial V^*}{\partial Y_n} = 0, \quad \frac{\partial V^*}{\partial X_n} = 0 \quad (15)$$

得 $M_0 = 0, Y_n = -\frac{1+\mu}{2} X_n$

$$X_n = -\frac{M_n}{e} \cdot \frac{1 + 2 \frac{n^2 \pi^2 I}{kAL^2} (1+\mu)}{1 + \frac{I}{Ae^2} + 2 \frac{n^2 \pi^2 I}{kAL^2} (1+\mu) + \frac{n\pi I}{hLe^2} \cdot \frac{3+2\mu-\mu^2}{4}} \quad (16)$$

$$M'' = 2he \int_0^{\infty} (-\sigma_x) dy = -e \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (17)$$

2.2.2 考察图2示等效T梁。梁任一截面力的平衡式为

$$\bar{M}'' = 2\lambda h e \sigma_e \quad (18)$$

$$\sigma_e A = 2 \lambda h \sigma_e \quad (19)$$

$$\sigma_e = \frac{\bar{M}'}{I} e - \sigma \quad (20)$$

这时若令图1示梁截面总弯矩与图2示梁截面总弯矩相等, 或令图1示梁截面翼缘与肋部交界处正应力 σ_x 等于图2示梁截面肋部与翼缘中面同一位置处应力 σ_e , 即可求得翼缘有效宽度 2λ 。

当取 $M = M_1 \cos \frac{\pi x}{L}$, 由式 (17) 有

$$\begin{aligned} M'' &= -e X_1 \cos \frac{\pi x}{L} \\ &= M_1 \cdot \frac{1 + 2\pi^2 I (1 + \mu) / (kAL^2)}{1 + I / (Ae^2) + 2\pi^2 I (1 + \mu) / (kAL^2) + \frac{\pi I}{he^2 L} \cdot \frac{3 + 2\mu - \mu^2}{4} \cos \frac{\pi x}{L}} \end{aligned} \quad (21)$$

又由 (18)、(19)、(20) 三式, 得

$$\bar{M}'' = \frac{2\lambda h e}{1 + 2\lambda h e / (Ae) + 2\lambda h e^2 / I} \cdot M \cdot \frac{e}{I} \quad (22)$$

令式 (21) 等于式 (22), 则有

$$C_1 M_1 \cos \frac{\pi x}{L} = \frac{2\lambda h e}{1 + 2\lambda h e / (Ae) + 2\lambda h e^2 / I} \cdot M_1 \cos \frac{\pi x}{L} \cdot \frac{e}{I}$$

最后得

$$2\lambda = \frac{1}{-\frac{h}{A} - \frac{he^2}{I} + \frac{he^2}{IC_1}} \quad (23)$$

其中

$$C_1 = \frac{1 + 2\pi^2 I (1 + \mu) / (kAL^2)}{1 + I / (Ae^2) + 2\pi^2 I (1 + \mu) / (kAL^2) + \frac{\pi I}{hLe^2} \cdot \frac{3 + 2\mu - \mu^2}{4}}$$

式 (23) 即按考虑横向剪切变形影响梁理论求解时T梁翼缘有效宽度取值公式。

当梁截面肋部为矩形时, $k = \frac{5}{6}$, $A = bH$, $I = bH^3/12$, $e = H/2$, 这时

$$2\lambda = \frac{b}{\frac{h}{H} \left(-4 + \frac{3}{C_1}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{H}{h}\right) \left(\frac{b}{L}\right)}{-4 + \left[\frac{4 + \frac{\pi^2}{10} \left(\frac{H}{L}\right)^2 6(1+\mu) + \frac{\pi}{4} (3+2\mu-\mu^2) \left(\frac{H}{h}\right) \left(\frac{b}{L}\right)}{1 + 2\frac{\pi^2}{10} \left(\frac{H}{L}\right)^2 (1+\mu)} \right]} L \quad (24)$$

式(24)即为一般高跨比 $\left(\frac{H}{2L} \leq \frac{1}{3}\right)$ 的T梁翼缘有效宽度取值公式。

2.2.3 考察图3示等效T形深梁。注意到假设三, 则按弹性力学平面应力理论确定梁肋部应力分布。设取应力函数 ϕ 满足式(2):

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n' \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{L} + B_n' \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{L} + C_n' z \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{L} + D_n' z \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$+ \frac{qx^2}{2b} - \mu \frac{qz^2}{2b} \quad (25)$$

注意到式(1)有

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right) \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) \left(A_n' \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{L} + B_n' \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{L} + C_n' z \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{L} + D_n' z \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{L} \right) + 2 \left(C_n' \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{L} + D_n' \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{L} \right) \right] \cos \frac{n\pi x}{L} - \mu \frac{q}{b} \quad (26)$$

$$\sigma_z = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left(A_n' \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{L} + B_n' \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{L} + C_n' z \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{L} + D_n' z \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{q}{b} \quad (27)$$

$$\tau_{xz} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) \left(A_n' \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{L} + B_n' \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{L} + C_n' z \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{L} + D_n' z \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{L} \right) + \left(C_n' \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{L} + D_n' \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{L} \right) \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (28)$$

由 $x=0, 2L$ 时, $\sigma_x \neq 0, \tau_{xz}=0$ 知所设应力函数 ϕ 可用于受对称荷载的连续等跨梁。

由 $z=0, \sigma_z=0$ (除支承点外), 有

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos \frac{n\pi x}{L} B_n' - \frac{q}{b} = 0$$

又由 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L} = -\frac{1}{2} \quad (0 < x < 2L)$, 有

$$-\frac{q}{b} = \frac{2q}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$\therefore \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 B_n' - \frac{2q}{b} = 0, \quad B_n' = \frac{2q}{b} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \quad (29)$$

当 $z = H$ 时, $\sigma_z = -\frac{q}{b}$, 注意到 $\frac{n\pi}{L}H$ 较大时, $\operatorname{sh} \frac{n\pi}{L}H \approx \operatorname{ch} \frac{n\pi}{L}H$, 有

$$-\frac{q}{b} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos \frac{n\pi x}{L} (A_n' + B_n' + C_n'H + D_n'H) \operatorname{sh} \frac{n\pi}{L}H - \frac{q}{b}$$

$$\therefore (A_n' + B_n' + C_n'H + D_n'H) = 0 \quad (30)$$

当 $z = 0$ 时, $\tau_{xz} = 0$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \left(\frac{n\pi}{L} A_n' + D_n'\right) = 0$$

$$\therefore D_n' = -\frac{n\pi}{L} A_n' \quad (31)$$

当 $Z = H$ 时, $\tau_{xz} = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left[\frac{n\pi}{L} (A_n' + B_n' + C_n'H + D_n'H) + (C_n' + D_n') \right] \sin \frac{n\pi x}{L} = 0$$

$$\therefore \frac{n\pi}{L} (A_n' + B_n' + C_n'H + D_n'H) + C_n' + D_n' = 0 \quad (32)$$

求解式 (29)、(30)、(31)、(32), 有

$$D_n' = -C_n', \quad A_n' = -B_n'$$

$$\therefore A_n' = -B_n' = -\frac{2q}{b} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2$$

$$C_n' = -D_n' = -\frac{2q}{b} \left(\frac{L}{n\pi}\right) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (33)$$

应力分量为

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \left(-\frac{n\pi}{L} A_n' - \frac{n\pi z}{L} C_n' + 2 C_n'\right) e^{-\frac{n\pi z}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} - \mu \frac{q}{b}$$

$$= -2\frac{q}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n\pi z}{L}\right) e^{-\frac{n\pi z}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} - \mu \frac{q}{b} \quad (34)$$

$$\sigma_z = -\frac{2q}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n\pi z}{L}\right) e^{-\frac{n\pi z}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{q}{b} \quad (35)$$

$$\tau_{xz} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2q}{b}\right) \frac{n\pi z}{L} e^{-\frac{n\pi z}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (36)$$

设图3示T形深梁翼缘正应力与肋部顶面处正应力相等, 即 $(\sigma_x)_{\text{翼缘}} = (\sigma_x)_{z=H}$ 由应力分布可知, 肋部 $(\sigma_x)_{z=H}$ 为压应力。

$$\therefore (\sigma_x)_{z=H} = -\frac{2q}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n\pi H}{L}\right) e^{-\frac{n\pi H}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} - \mu \frac{q}{b} \quad (37)$$

$$\text{则 } \overline{M}'' = 2\lambda h \frac{H}{2} \left[-\frac{2q}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n\pi H}{L}\right) e^{-\frac{n\pi H}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} - \mu \frac{q}{b} \right]$$

$$\therefore \overline{M}'' = 2\lambda \frac{Hh}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{2q}{b}\right) e^{-\frac{n\pi H}{L}} \left(1 - \frac{n\pi H}{L}\right) + 2\mu \frac{q}{b} \right] \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (38)$$

对于图1示T梁, 注意到式(17)。当令 $M'' = \overline{M}''$, 有

$$-e \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{L} = 2\lambda h e \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{2q}{b}\right) e^{-\frac{n\pi H}{L}} \left(1 - \frac{n\pi H}{L}\right) + 2\mu \frac{q}{b} \right] \cos \frac{n\pi x}{L}$$

化简后

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda h \left[-\frac{2q}{b} e^{-\frac{n\pi H}{L}} \left(1 - \frac{n\pi H}{L}\right) + 2\mu \frac{q}{b} \right] \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{L} = 0$$

$$\text{即 } 2\lambda h \left[-\frac{2q}{b} e^{-\frac{n\pi H}{L}} \left(1 - \frac{n\pi H}{L}\right) + 2\mu \frac{q}{b} \right] + X_n = 0$$

将 X_n 表达式(16)代入上式, 得

$$2\lambda = \frac{M_s}{qHh} \cdot \frac{[1 + 2\frac{n^2\pi^2 I}{kAL^2} (1 + \mu)] (\frac{b}{L})}{[\mu - (1 - \frac{n\pi H}{L}) e^{-\frac{n\pi H}{L}}] [1 + \frac{I}{Ae^2} + 2\frac{n^2\pi^2 I}{kAL^2} (1 + \mu) + \frac{n\pi I}{hLe^2} \cdot \frac{3 + 2\mu - H^2}{4}]} \quad (39)$$

特别对于矩形肋部, $k = \frac{5}{6}$, $I = \frac{bH^3}{12}$, $A = bH$, $e = \frac{H}{2}$, 有

$$2\lambda = \frac{M_n}{qHh} \cdot \frac{3[1 + \frac{n^2\pi^2 I}{5} (\frac{H}{L})^2 (1+\mu)] (\frac{b}{L})}{[\mu - (1 - \frac{n\pi H}{L})e] [4 + \frac{3n^2\pi^2}{5} (\frac{H}{L})^2 (1+\mu) + \frac{n\pi}{4} (3+2\mu - \mu^2) (\frac{b}{L}) (\frac{H}{h})]} L \quad (40)$$

式(40)即求T形深梁翼缘有效宽度取值公式。

3 讨 论

3.1 式(24)的应用范围。表1给出由式(24)确定的 2λ 值及其与文献[1] 2λ 值的比较。

从表1知, 对于 $\frac{H}{2L} < \frac{1}{30}$ 的细长梁, 文献[1]式值与式(24) 2λ 值吻合较好。对于

$\frac{1}{30} < \frac{H}{2L} \leq 1/3$ 的一般高跨比梁, 文献[1] 2λ 值明显偏小, 且随高跨比增加与宽跨比减小,

差值越大。若令 $\frac{H}{L} = \alpha$, $\frac{H}{h} = \beta$, $\frac{b}{L} = \gamma$, 则式(24)可写成

$$2\lambda = \frac{\beta\gamma}{-4 + \left\{ \frac{4 + \frac{3\pi^2}{5} \alpha^2 (1+\mu) + \frac{\pi}{4} (3+2\mu - \mu^2) \beta\gamma}{1 + \frac{\pi^2}{5} \alpha^2 (1+\mu)} \right\}} L \quad (24a)$$

当令 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 则式(24a)与文献(1) 2λ 取值公式相等, 即 $2\lambda = \frac{1}{\frac{\pi}{4} (3+2\mu - \mu^2)} L$,

说明文献[1]的T梁有效翼缘宽度取值公式为本文式(24)在梁高跨比趋于零时的特例。

另一方面, 式(24)推证的假设之一是, 设图2示等效T梁肋部正应力的 σ_x 沿截面高度为线性分布。由于剪切变形产生附加挠度, 当 $\frac{H}{L}$ 较大时梁肋部截面正应力 σ_x 分布逐渐偏离直线。因此有必要考察该假设对本文式(24)应用范围的影响。

为此, 考察图4示梁。该梁矩形截面, $H/2L < 1/2$ 。梁受均布荷载。梁端正应力 $\sigma_x \neq 0$, 即为连续梁中部任一跨。不计自重。按平面应力求解。由双调和方程 $\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$ 得应力函数 ϕ 。最后得弹性力学应力解。

表 1

$\frac{2\lambda}{L}$		$\frac{b}{L}$													$\frac{2\lambda}{L}$		$\frac{2\lambda}{L}$					
梁 长	$\frac{H}{2L}$	$\frac{H}{h}$													$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{L}{\lambda}$				
		$\mu=0.3$																				
梁 长	$\frac{1}{30}$	$\mu=0.167$													$\frac{1}{20}$	$\mu=0.3$	$\mu=0.167$	$\mu=0.083$				
		$H/h=4$																				
		$H/h=5$																				
		$H/h=6$																				
梁 长	$\frac{1}{20}$	$\mu=0.3$													$\frac{1}{10}$	$\mu=0.3$	$\mu=0.167$	$\mu=0.083$				
		$H/h=4$																				
		$H/h=5$																				
		$H/h=6$																				
梁 长	$\frac{1}{10}$	$\mu=0.3$													$\frac{1}{5}$	$\mu=0.3$	$\mu=0.167$	$\mu=0.083$				
		$H/h=4$																				
		$H/h=5$																				
		$H/h=6$																				
梁 长	$\frac{1}{5}$	$\mu=0.3$													$\frac{1}{3}$	$\mu=0.3$	$\mu=0.167$	$\mu=0.083$				
		$H/h=4$																				
		$H/h=5$																				
		$H/h=6$																				
梁 长	$\frac{1}{3}$	$\mu=0.3$													$\frac{1}{10}$	$\mu=0.3$	$\mu=0.167$	$\mu=0.083$				
		$H/h=4$																				
		$H/h=5$																				
		$H/h=6$																				

$\frac{2\lambda}{L}$		$\frac{b}{L}$													$\frac{2\lambda}{L}$		$\frac{2\lambda}{L}$					
梁 长	$\frac{H}{2L}$	$\frac{H}{h}$													$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{L}{\lambda}$				
		$\mu=0.3$																				
梁 长	$\frac{1}{30}$	$\mu=0.167$													$\frac{1}{20}$	$\mu=0.3$	$\mu=0.167$	$\mu=0.083$				
		$H/h=4$																				
		$H/h=5$																				
		$H/h=6$																				
梁 长	$\frac{1}{20}$	$\mu=0.3$													$\frac{1}{10}$	$\mu=0.3$	$\mu=0.167$	$\mu=0.083$				
		$H/h=4$																				
		$H/h=5$																				
		$H/h=6$																				
梁 长	$\frac{1}{10}$	$\mu=0.3$													$\frac{1}{5}$	$\mu=0.3$	$\mu=0.167$	$\mu=0.083$				
		$H/h=4$																				
		$H/h=5$																				
		$H/h=6$																				
梁 长	$\frac{1}{5}$	$\mu=0.3$													$\frac{1}{3}$	$\mu=0.3$	$\mu=0.167$	$\mu=0.083$				
		$H/h=4$																				
		$H/h=5$																				
		$H/h=6$																				
梁 长	$\frac{1}{3}$	$\mu=0.3$													$\frac{1}{10}$	$\mu=0.3$	$\mu=0.167$	$\mu=0.083$				
		$H/h=4$																				
		$H/h=5$																				
		$H/h=6$																				

$$\sigma_x = \frac{M_0}{I} z + \frac{q}{1} \left[\frac{1}{2} (L^2 - x^2) z + \left(\frac{H^2}{20} z - \frac{z^3}{3} \right) \right] \quad (41)$$

若按材料力学求解, 其应力

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} (L^2 - x^2) z + \frac{M_0}{I} z \quad (42)$$

考察 $x=0$, $z = \frac{H}{2}$ 情况 (即梁跨中截面上边缘), 弹解中第三项与第二项比值。

当 $\frac{H}{2L} = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ 时, 比值分别为 0.27%, 1.67%, 2.96%。正是由于式 (41) 中第三项的存在, 使得 σ_x 沿截面高度不为线性了。但上述比值说明, 以材力解 σ_x 代替弹性力学解 σ_x , 对于 $\frac{H}{2L} \leq \frac{1}{3}$ 的 T 形梁而言, 引起的误差是小的。式 (24) 可以适用于 $\frac{H}{2L} \leq \frac{1}{3}$ 情况。

3.2 2λ — $\frac{H}{2L}$ 关系。图 5 的曲线清楚地表明 2λ — $\frac{H}{2L}$ 关系。图 5 的曲线值计算时, 在题设条件下, 可设无限多跨连续梁任一跨为两端固定梁, 作用均布荷载 q , 弯矩分布 $M = -q \left(\frac{x^2}{2} - xL + \frac{L^2}{3} \right)$, 由于荷载、结构均对称, 在 $[0, 2L]$ 上展为余弦级数

$$M = -\frac{8qL^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \cos \frac{n\pi x}{L}。当 n=1 时, M_1 \approx \frac{1}{5} qL^2。$$

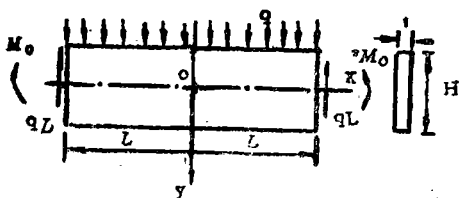


图 4

$$\left. \begin{aligned} M^0 &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x|_{x=\pm L} y dy \\ 0 &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x|_{x=\pm L} dy \end{aligned} \right\}$$

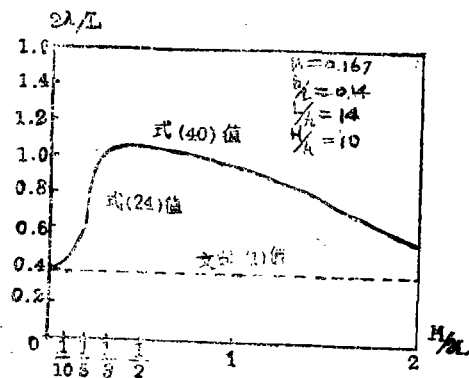


图 5

从图5的 2λ — $\frac{H}{2L}$ 曲线知, (1) 当梁高跨比 $\frac{H}{2L} \rightarrow 0$, 式(24)与文献[1] 2λ 值相等; (2) 随梁高跨比增加, 翼缘有效宽度增加。在 $\frac{H}{2L}$ 大致等于 $\frac{1}{3}$ 处, 翼缘有效宽度最大; (3) 式(40)在 $\frac{H}{2L} = \frac{1}{3}$ 处与式(24)相衔接, 当 $\frac{H}{2L} = \frac{1}{3}$, 式(24)的 $2\lambda = 1.08L$, 式(40) $2\lambda = 1.10L$ 。随着 $\frac{H}{2L} > \frac{1}{3}$, 翼缘有效宽度减小, 当 $\frac{H}{2L} \rightarrow \infty$ 时, 翼缘有效宽度趋于零。

对于不同的 $\frac{H}{L}$, $\frac{b}{L}$, $\frac{H}{h}$, $\frac{L}{h}$ 及 μ 均可由本文式(24)及式(40)得到类似的曲线。

4 结 论

随着工程实践的发展, 较大高跨比T梁结构在工程上的应用日益广泛。因此, 探讨并提出考虑梁剪切变形影响的T梁翼缘有效宽度取值方法及公式, 以合理地确定有效翼缘宽度, 准确地估计梁的承载能力, 有着重要的理论和实际意义。通过本文工作, 可得以下结论:

4.1 一般高跨比($\frac{H}{2L} \leq \frac{1}{3}$)的T梁翼缘有效宽度合理取值仅考虑原型T梁的剪切变形影响, 而可忽略等效T梁剪切变形的影响。对于 $\frac{H}{2L} > \frac{1}{3}$ 的T形深梁, 其翼缘有效宽度的合理取值不仅考虑原型T梁的剪切变形影响, 而且必须考虑等效T形深梁剪切变形影响。

4.2 T梁结构翼缘有效宽度的影响因素有梁高跨比、宽跨比、梁高与翼缘厚度比、梁跨度与翼缘厚度比及材料泊松比等。其中梁高跨比、宽跨比影响较大。

4.3 文献[1]翼缘有效宽度取值公式为本文式(24)当 $\frac{H}{2L} \rightarrow 0$ 时的特例, 仅可用于细长梁($\frac{H}{2L} < \frac{1}{30}$)。对于一般高跨比的梁, 文献[1]公式取值偏小过甚。

4.4 随梁高跨比 $\frac{H}{2L}$ 增加, T梁结构翼缘有效宽度增大, 在 $\frac{H}{2L}$ 约为 $\frac{1}{3}$ 处, 达到最大值。而后, 随 $\frac{H}{2L}$ 增加, 剪切变形影响明显增大, 翼缘有效宽度减小。当 $\frac{H}{2L} \rightarrow \infty$ 时, 翼缘有效宽度趋于零。

4.5 对于 $\frac{H}{2L} \leq \frac{1}{3}$ 的T梁结构可应用本文式(24)确定翼缘有效宽度; 对于 $\frac{H}{2L} > \frac{1}{3}$

的T梁结构,可应用本文式(40)确定翼缘有效宽度。

参 考 文 献

- [1] Timoshenko, S.P. and Gooder, J.N. Theory of Elasticity. Third Edition, McGraw—Hill Book Company, 1970, P262—P268
- [2] 新西兰标准协会SANZ混凝土结构设计实用规范, NZS 3101 Part1: 1982
- [3] 钢筋混凝土房屋结构规范 (ACI318—83), 哈尔滨建工学院印
- [4] 混凝土结构设计规范修订组 混凝土结构设计规范 (第二次送审稿), 北京, 1986
- [5] C.R.Vallenilla and R.Bjorhovde, Effective width Criteria for Composite Beams, Engineering Journal of AISC, Fourth Quarter/1985
- [6] R.Park and T.Paulay, Reinforced Concrete Structures, A Wiley—Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc. 1975
- [7] 鹭津久一郎, 弹性和塑性力学中的变分法 (中译本), 科学出版社, 1983
- [8] 王龙甫编, 弹性理论, 科学出版社, 1984 (第二版)

Mechanical Analysis on Effective Width of Wide Flange T Beams

Guo Legong

(Department of Civil Engineering and Architecture)

Abstract In this paper the influences of transverse shear deformation on the effective width of T beams' flanges have been investigated and the method and formulae of effective width of T beams' flanges considering shear deformation have been put forward. The formulae have can take account for the variation of beam depth-span ratio, beam width-span ratio, beam depth-flange width ratio, beam span-flange width ratio and Poisson's ratio of materials. The formula of effective width of T Beams' flanges in Relevance (1) has been proved to be a special case of the formulae in this paper when the ratio of beam depth-span $\alpha = \frac{H}{2L} \rightarrow 0$.

Keywords: effective width of T beams, shear deformation, beam depth-span ratio