郑 州 工 学 院 学 报

第9卷 第3期 JOURNAL OF ZHNGZHOU INSTITUTE VOL.9 NO.3

1988年9月 OF TECHNOLOGY September 1988

非线性微分方程组在经济学中的应用

杨振德 侯双印

（郑州大学） （郑州工学院）

提要： 在经济学的研究中，很多问题可用线性数学模型去处理。但对于有些问题为了更深入地进行分析研究，只有采用非线性的数学方法，才能彻底地讲清楚。

本文将对商品和货币市场的均衡稳定性问题，应用非线性微分方程组的理论来处理。最后将根据Liapunov函数的构造，得到经济学理论上的完满解决。

关键词： 非线性微分方程组，拉普诺（Liapunov）函数，货物市场和金融市场。

1 关于微分方程组的几个定理及应用举例

设微分方程组：

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

及对应的齐次微分方程组为

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

记$A=(a_{ij})_{2\times 2}$，A的特征方程为$|\lambda I - A| = 0$，根据微分方程组的解、特解、通解的定义易证下面的定理一至定理四。

定理一 若$|A|\neq 0$，则（1）式有特解 $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}$

定理二 如 λ为A的特征方程的根，则$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda t} \\ \alpha_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$为（2）式的解，其中$\alpha_1$，$\alpha_2$为不全为零的常数。

定理三 设 λ_1，λ_2为$|\lambda I - A| = 0$的根，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则

$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} e^{\lambda_1 t} + \alpha_{12} e^{\lambda_2 t} \\ \alpha_{21} e^{\lambda_1 t} + \alpha_{22} e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$为（2）式的通解，其中$\alpha_{11}$，$\alpha_{12}$，$\alpha_{21}$，$\alpha_{22}$为常数且$|\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 \neq 0$，$|\alpha_{21}|^2 + |\alpha_{22}|^2 \neq 0$

定理四　若$|A|\neq 0$，λ_1，λ_2为$|\lambda I-A|=0$的两个相异的根，则（1）式的通解为

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_{11}e^{\lambda_1 t}+\alpha_{12}e^{\lambda_2 t} \\ \alpha_{21}e^{\lambda_1 t}+\alpha_{22}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}$$

其中$\alpha_{ij}(i,\ j=1,\ 2)$为常数，且$|\alpha_{11}|^2+|\alpha_{12}|^2\neq 0$，$|\alpha_{21}|^2+|\alpha_{22}|^2\neq 0$

一般微分方程组：

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

记　$A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$，A的特征方程为$|\lambda I-A|=0$，根据微分方程组通解的定义易证下面的定理五。

定理五　如$|A|\neq 0$　且λ_1，λ_2，$\cdots\lambda_n$为$|\lambda I-A|=0$的n个相异的根，则（3）式的通解为

$$(u_1(t),\ u_2(t),\ \cdots,\ u_n(t))^T=(\upsilon_1(t),\ \upsilon_2(t),\ \cdots,\ \upsilon_n(t))^T-A^{-1}(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)^T$$

其中　$\upsilon_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e^{\lambda_i t}$　　　$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

显然下面的定理也是成立的。

定理六　如$A^H=A$，且$|\lambda I-A|=0$有n个相异的根，则当A为负定矩阵时，有

$$(u_1(t),\ u_2(t),\ \cdots,\ u_n(t))^T\xrightarrow{t\to+\infty}-A^{-1}(b_1,\ b_2,\cdots,b_n)^T$$

例　由投入产出模型可知：

$$X_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j+d_i,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

则稳定条件为

$$\frac{dx_i}{dt}=k_i\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+d_i-x_i\right],\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

若用矩阵表示，则为

$$X'=K(A-I)X+Kd \tag{4}$$

其中　$K=\mathrm{diag}(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$

$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$，$d=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n)^T$

在均衡的情况下，可得

$$O=-K(I-A)\overline{X}+Kd \tag{5}$$

将(4)式减去(5)式得

$$X' = -K(I-A)(X-\overline{X}) \tag{6}$$

令　一般解为：$x_i = \overline{x_i} + \alpha_i e^{\lambda t}$，代入(6)式可得：

$$[\lambda I + K(I-A)]\,\alpha e^{\lambda t} = 0$$

其中　$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T \neq (0, 0, \cdots, 0)^T$

故　$|\lambda I + K(I-A)| = 0$

解之得：$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，由它可判别均衡时的稳定性。

注：关于非线性微分方程的求解问题，可用线性化的方法进行研究，在下节我们研究之。

2　商品和货币市场的稳定性

在经济学理论中，对商品和货币市场的均衡以及均衡点的变动问题作了较详细的讨论，并论证了对应原理的重要意义，但对稳定性条件没有作深入的数学理论上的探讨。

本节我们以IS——LM模型为例，用线性化的方法来阐明局部稳定性的问题。

已知IS——LM模型：

$$\begin{cases} u(t) = C(u(t) - T(u)) + I(r) + G_0 \qquad 0 < C' < 1,\ 0 < T' < 1,\ I' < 0 \\ m_0^S = L(r) + K(u) \end{cases} \tag{1}$$

其中：u为所得，C为消费，T为租税，I为投资，G_0为支出，m_0^S为货币供给，L为货币储藏，K为货币交易，r为利率。

而IS和LM两曲线的斜率分别为：

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{du(IS)} = \dfrac{1 - C'(1-T')}{I'} < 0 \\[2ex] \dfrac{dr}{du(LM)} = \dfrac{K'}{L'} > 0 \end{cases}$$

稳定条件为：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = k_1\,[C(u - T(u)) + I(r) + G_0 - u]\ ,\ k_1 > 0 \\[2ex] \dfrac{dr}{dt} = k_2\,[L(r) + K(u) - m_0^S]\ ,\ k_2 > 0 \end{cases} \tag{2}$$

设$(\overline{u}, \overline{r})$为(1)的两个市场的共同均衡点，即

$$\begin{cases} \overline{u} = C(\overline{u} - T(\overline{u})) + I(\overline{r}) + G_0 \\ m_0^S = L(\overline{r}) + K(\overline{u}) \end{cases} \tag{3}$$

将(2)减去(3)，可得：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=k_1\left[C(u-T(u))-C(\overline{u}-T(\overline{u}))+I(r)-I(\overline{r})-(u-\overline{u})\right] \\ \dfrac{dr}{dt}=k_2\left[L(r)-L(\overline{r})+K(u)-K(\overline{u})\right] \end{cases} \tag{4}$$

利用Taylor展开，可得：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=k_1\left[C'(1-T')\cdot(u-\overline{u})+I'\cdot(r-\overline{r})-(u-\overline{u})\right] \\ \dfrac{dr}{dt}=k_2\left[L'\cdot(r-\overline{r})+K'\cdot(u-\overline{u})\right] \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-k_1\left[1-C'(1-T')\right]\cdot(u-\overline{u})+k_1I'\cdot(r-\overline{r}) \\ \dfrac{dr}{dt}=k_2K'\cdot(u-\overline{u})+k_2L'\cdot(r-\overline{r}) \end{cases} \tag{5}$$

令此联立微分方程组的解为：

$$\begin{cases} u=\overline{u}+Ce^{nt} & 或 & u-\overline{u}=Ce^{nt} \\ r=\overline{r}+Be^{nt} & 或 & r-\overline{r}=Be^{nt} \end{cases}$$

代入(5)式，可得：

$$\begin{pmatrix} n+k_1\left[1-C'(1-T')\right] & -k_1I' \\ -k_2K' & n-k_2L' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}e^{nt}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因C，B不同时为零

$$\therefore \begin{vmatrix} n+k_1\left[1-C'(1-T')\right] & -k_1I' \\ -k_2K' & n-k_2L' \end{vmatrix}=0$$

即

$$n^2+\left[k_1(1-C'(1-T'))-k_2L'\right]n-k_1k_2\left[1-C'(1-T')\right]\cdot L'-k_1k_2I'K'=0$$

因上式的系数的符号满足：

$$\left[k_1(1-C'(1-T'))-k_2L'\right]>0$$

$$\left[-k_1k_2(1-C'(1-T'))L'-k_1k_2I'K'\right]>0$$

故由Descartes符号法则知，方程式的解n的实数部分为负

$$\therefore \begin{cases} u=\overline{u}+C_1e^{n_1t}+C_2e^{n_2t} \\ r=\overline{r}+B_1e^{n_1t}+B_2e^{n_2t} \end{cases}$$

当$t\to+\infty$时　　$(u,r)\to(\overline{u},\overline{r})$

由此可知，上述模型是稳定的

我们的证明方法是利用线性化的方法，而线性化是有局部性的，所以本节所讨论的问题为局部稳定性的问题，下节我们将研究全局稳定性的问题。

3 全局稳定性

局部稳定性问题，是指由于外来因素的干扰，使经济体系“微离”均衡点，则仍有趋向均衡点的趋势，也就是我们仅限于在均衡点的邻域内讨论稳定性问题。至于全局稳定性是不论在任何情况下，都趋向于均衡点。

在本文“一”中所述的线性模型有一均衡点时，如果均衡是局部稳定的，亦是全局稳定的，但本文的“二”中所述的非线性模型，采用线性化的方法，只能说明局部稳定与否，即使为局部稳定，并不能保证为全局稳定。

全局稳定性的讨论需要用数学上的Liapunov直接法，或叫第二方法，不是先求解而后才讨论稳定性问题，而是“直接”地讨论模型的稳定性问题。

定理 设微分方程组为：

$$\frac{du_i}{dt}=f_i(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

已知：

$0=f_i(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。

若有一函数：

$$V(u_1-\overline{u_1},\ u_2-\overline{u_2},\ \cdots,\ u_n-\overline{u_n})$$

V对所有变量$(u_i-\overline{u_i})$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$具有一阶连续偏导数，而且函数V满足下列条件：

1^0 若至少有一个：$(u_1-\overline{u_1})$，…，$(u_n-\overline{u_n}\})$不为零，则V正定，即$V>0$，只有所有$u_i-\overline{u_i}=0$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$时，则$V=0$；

2^0 当n维空间R^n上：$u=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)$和$\overline{u}=(\overline{u_1},\ u_2,\ \cdots\overline{u_n})$的距离：$\|u-\overline{u}\|\to 0$时，$V\to\infty$；

3^0 若至少有一个：$(u_1-\overline{u_2})$，…，$(u_n-\overline{u_n})$不为零，则

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial(u_i-\overline{u_i})}\cdot\frac{\partial(u_i-\overline{u_i})}{t}<0$$

当且仅当，所有$u_i-\overline{u_i}=0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$时，则

$$\frac{dV}{dt}=0$$

由上述条件可得：均衡状态$(\overline{u_1},\ \overline{u_2},\ \cdots,\ \overline{u_n})$为全局稳定性。

上述定理意指：

Liapunov函数V的存在乃说明当时间变化时：

$$u=(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)) \longrightarrow \bar{u}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_n)$$

例、设某一市场中的供给和需要函数分别为：

$$\begin{cases} W^s=-c+dp & c, d>0 \\ W^d=a-bp & a, b>0 \end{cases}$$

如果达到均衡时，即$W^s=W^d$时，可解得均衡价格为：

$$\bar{p}=\frac{c+a}{b+d}$$

由Walras稳定性条件，可得：

$$\frac{dp}{dt}=k[(a-bp)-(-c+dp)] \qquad k>0$$

则 $$\frac{dp}{dt}=k[(a+c)-(b+d)p] \qquad k>0$$

由均衡情况可知：

$$0=k[(a+c)-(b+d)\bar{p}], \qquad k>0$$

因此对此模型可找到一个Liapunov函数：$V(p)=(p-\bar{p})^2$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt}=2(p-\bar{p})\cdot\frac{dp}{dt}=$$

$$=2(p-\bar{p})\cdot k[(a+c)-(b+d)p]$$

$$=-2k(p-\bar{p})(b+d)(p-\frac{a+c}{b+d})$$

$$=-2k(b+d)\cdot(p-\bar{p})^2$$

$\because$ b，k，d均为正数

$\therefore$ 当$p\neq\bar{p}$时，则$\frac{dV}{dt}<0$

所以，此一模型的均衡为全局稳定性。

参　考　文　献

[1] Gandolfo, G.: Mathematical methods and models in economic dynamics;

[2] Allen, R.G.D.: Mathematical economics; (1959年).

THE APPLICATION OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE ECONOMICS

Yang Zhende Hou Shuangyin

(ZhengZhou University) (ZhengZhon Institute of Technology)

Abstract In the research of economics.the model of linear mathemalics can solve many problems.However, with respect to some problems, in order to study explicitly. We must adopt methods of nonlinear ma-thematics to make them sowed completély.

This article applies the theory of nonlinear differential equations to discuss and solve the problems of equilibrium and stability in the goods market and money market, and by means of the constraction of liapunov function, finally. We get a satisfied answers in the econom ic theory.

Keywords: Nonlinear differential eguations, Liapunov function, goods market and money market.