郑州工学院学报
第9卷 第3期 JOURNAL OF ZHNGZHOU INSTITUTE VOl.9NO.3
1988年9月 OF TECHNOLOGY September 1988

ARMA谱值估计的快速算法的研究

丁 洪 杨叔子 康宜华
（华中理工大学）

提要：本文首次从运算量的角度，研究了现有ARMA谱值估计（包括最大熵谱值估计）的几种快速算法的各自特点，指出综合利用三角函数的周期性和递推性关系是进一步提高谱值估计速度的有效途径，同时指出，在计算机上实现ARMA谱值估计时，三角函数的调用时间在整个计算时间中占有相当的比例。在此基础上，本文提出了一种综合快速算法，理论与试验结果表明，该算法无论在计算速度上，还是在算法的综合性能方面均是优越的。

关键词：ARMA谱估计，最大熵谱估计，谱值估计，快速算法，

1 引 言

自回归滑动平均（ARMA）谱估计是时间序列分析中一项重要的内容，也是在动态数据处理与振动信号分析中应用越来越广泛的数据处理手段之一。从估计过程来看，ARMA谱估计包括ARMA模型的建立和在此基础之上的谱值估计两项基本内容。自从这种谱估计方法问世以来，人们一直致力于模型建立方法的研究，寻求有效的建模方法，并已取得了积极的成果[1] [2]。近年来，人们开始注意到了在ARMA谱估计方法的应用中谱值估计问题的影响，尤其是谱值估计速度问题[3]－[6]。实践证明，既使不计及模型的建立时间，如果直接计算谱值估计，即采用常规算法，其计算时间亦远比采用FFT算法获得Fourier谱估计的时间长，尤其是在模型阶数较高的情况下，这无疑会使ARMA谱估计方法的应用受到限制。文献〔3〕提出了两种快速算法，即增阶算法和缩频算法，其基本原理是利用FFT算法中计算技巧来计算最大熵（ME）谱值估计。A. Van den Bos已于1971年论证了最大熵谱与ARMA谱的特殊形式AR谱的等效性[7]，因此，上面两种算法很易推广到ARMA谱值估计。文献〔4〕给出了扩展FFT算法，并减少了运算过程中大量零元的计算；文献〔5〕中提出的三角函数展开型快速算法则一方面利用三角函数的周期性，另一方面通过简化三角函数的运算过程，提高运算速度；文献〔6〕则运用了三角函数间的递推关系，化三角函数的复数运算为一般自然数的四则运算。应用结果表明，上述各快速算法，都不同程度地提高了ARMA（或ME）谱值估计的速度。本文研究表明，运用三角函数的周期性和三角函数的递推关系是提高谱值估计速度的两条基本途径，如何综合地运用此两途径是进一步地提高谱值估计速度和效率的关键。在此基础上

本文1988年5月30日收到

上，作者提出了一种综合运用这两条途径的快速算法（综合算法），理论与试验结果表明，该算法无论在速度上，还是在综合性能方面都是优越的。

2 提高ARMA谱值估计速度的途径

对于给定的零均值，平稳时间序列｛x_t｝，可建立ARMA（p，q）模型：

$$x_t-\varphi_1x_{t-1}-\cdots-\varphi_px_{t-p}=a_t-\theta_1a_{t-1}-\cdots-\theta_qa_{t-q}$$

$$a_t\sim NID(0,\ \sigma_a^2) \tag{1}$$

式中，φ_i，θ_i分别为自回归（AR）和滑动平均（MA）部分模型系数，p，q为相应的AR和MA的阶数，σ_a^2则为模型残差的方差。对(1)式作单位圆上的z变换，并离散化得：

$$S_{ARMA}(n)=\frac{\sigma_a^2\left|1-\sum\limits_{m=1}^{q}\theta_m\exp\left(-j2\pi\frac{n}{2L}m\right)\right|^2}{\left|1-\sum\limits_{m=1}^{p}\varphi_m\exp\left(-j2\pi\frac{n}{2L}m\right)\right|^2}$$

$$n=0,\ 1,\ \cdots\ L-1 \tag{2}$$

式中，L为谱线总条数（即谱值估计数）。显然，(1)式和(2)式分别对应于ARMA谱估计中模型建立与谱值估计两大步骤。

2.1 运算量的考虑

考察（2）式可看到，其分子和分母具有同样的数学表达形式：

$$\left|F_{p_m,M}(n)\right|^2=\left|\sum_{m=0}^{M-1}p_m\exp\left(-j2\pi\frac{n}{2L}m\right)\right|^2$$

$$n=0,\ 1,\ \cdots L-1 \tag{3}$$

式中，p_m等于$-\theta_m$，或是等于$-\varphi_m$，且$p_0=1$，M等于$(q+1)$，或是等于$(p+1)$。显然，如能寻求到减少(3)式运算量的方法，也就相当于找到了计算(2)式的快速算法。从运算量的角度考虑，实际上，在p_m为实数的情况下，(3)式运算量中复乘法次数并不等于$(\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}L)$，因为式中的旋转因子$\exp\left(-j2\pi\frac{n}{2L}m\right)$并不是一个已知的复常数。事实上，在计算机上，通常由于没有复数处理能力，exp(·)复函数是按如下公式计算的：

$$\begin{cases} e^{jy}=\cos y+j\sin y \\ \sin y=y-y^3/3!+y^5/5!-\cdots \\ \cos y=1-y^2/2!+y^4/4!-\cdots \end{cases} \tag{4}$$

每计算一个$F_{p_m,M}(n)$值，需作两次三角函数调用，要进行多次乘法与加法运算，所占用的机时远远多于一般的四则运算。因此，(3)式的运算量应作如下修正：

复乘法次数：$LM\left(\frac{1}{2}+T_M\right)+\frac{1}{2}L$

复加法次数：$LM\left(\frac{1}{2}+T_A\right)+\frac{1}{2}L$

其中，T_M，T_A分别表示调用三角函数所需复乘法次数与复加法次数的相当量，它们与预先设置的数值精度和采用的计算机高级语言有关。作者在IBM－pc上对$F_{p_m,M}(n)$的计算量进行了测定，取$L=512$，$M=50$，设置的数值精度为单精度，采用的高级语言为MS－PASCAL，测定结果为，$T_M+T_A\doteq 7$，这样，三角函数的计算时间占整个谱值估计时间的比例是：

$$\upsilon=\frac{7M}{8M+1} \tag{5}$$

(5)式结果表明，减少(3)式中三角函数的调用次数和调用时间乃是提高其计算速度的关键。

2.2　减少运算量的途径

仔细考察(3)式，会发现它与离散 Fourier 变换(DFT)公式有点相似，但又不完全相同。这是一点很大的启发，据此，作者曾在文献〔3〕中提出了基于FFT算法的增阶算法和利用 FFT 算法计算技巧的缩频算法。文献〔4〕对此曾提出了一种扩展 FFT 算法，减少了增阶算法运算过程中大量零元的计算，提高了计算效率。然而，这三种算法都有一个共同的特点，都是利用〔3〕式中三角函数的周期性，来减少三角函数的调用次数。作者在文献〔5〕中提出的算法则是一方面用

$$\begin{cases}\sin y\doteq y-y^3/3!\\ \cos y\doteq 1-y^2/2!\end{cases}\qquad \left(y\leqslant\frac{\pi}{r_2}\right)$$

来简化(4)式中的三角函数的调用时间，减少T_M和T_A值，其中，r_2为圆周等份数。根据误差理论，这种简化的舍取误差小于$y^4/4!$；另一方面，利用三角函数的周期性减少三角函数的调用次数，效果是显著的。周期性作为三角函数的特征之一，是减少三角函数运算量的重要途径之一。除此之外，还可用三角函数间的递推关系：

$$\exp\left(-j2\pi\frac{n}{2L}m\right)=\left[\exp\left(-j2\pi\frac{1}{L}\right)\right]^{nm}$$

来减少三角函数的调用次数，文献〔6〕中介绍的快速算法正是利用了这种递推性质，将大量的三角函数调用化为一般的四则运算，然而，遗憾的是三角函数的周期性没有得到有效的利用。值得指出的是，三角函数间的递推关系的形式也不是唯一的，可通过多种途径来实现这种递推关系。这样，如何综合地利用三角函数的周期性和更有效的递推关系乃是进一步地提高谱值估计速度所必须研究的。

3　ARMA谱值估计的一种综合快速算法

3.1 引例：

重新研究（3）式，假设M=5，则存在：

$$\left|F_{p_m,5}(n)\right|^2=\left[\sum_{m=0}^{4}p_m\exp\left(-j2\pi\frac{n}{2L}m\right)\right]\left[\sum_{m=0}^{4}p_m\exp\left(j2\pi\frac{n}{2L}m\right)\right]$$
$$=C_0+C_1\cos n\theta+C_2\cos 2n\theta+C_3\cos 3n\theta+C_4\cos 4n\theta$$
$$=\sum_{m=0}^{4}d_m(n)\qquad(6)$$

式中，$C_0\overset{\triangle}{=}\sum_{m=0}^{4}p_m^2$，$C_1\overset{\triangle}{=}2\times\sum_{m=0}^{3}p_{m+1}p_m$，$C_2\overset{\triangle}{=}2\sum_{m=0}^{2}p_{m+2}p_m$

$C_3\overset{\triangle}{=}2\sum_{m=0}^{1}p_{m+3}p_m$，　$C_4\overset{\triangle}{=}2p_4p_0$，　$\theta\overset{\triangle}{=}\frac{\pi}{L}$，

$$d_m(n)\overset{\triangle}{=}C_m\cos(n\cdot m\theta),\quad m=0,1,\cdots 4,\quad n=0,1,\cdots L-1\qquad(7)$$

由三角函数的递推关系：

$\cos(ny)=2\cos[(n-1)y]\cos y-\cos[(n-2)y]$

代入(7)式可得：

$$d_m(n)=d_m(n-1)\cdot 2\cos(m\theta)-d_m(n-2)\qquad m=0,1,\cdots 4$$

代入(6)式得递推关系式：

$$\left|F_{p_m,5}(n)\right|^2=\sum_{m=0}^{4}2dm(n-1)\cos(m\theta)-\left|F_{p_m,5}(n-2)\right|^2\qquad n=2,3,\cdots L-1\qquad(8)$$

可求初值：

$$\left|F_{p_m,5}(0)\right|^2=\sum_{m=0}^{4}C_m$$

$$\left|F_{p_m,5}(1)\right|^2=\sum_{m=0}^{4}C_m\cos(m\theta)$$

3.2　综合快速算法

由上面的引例，推广(6)式可得：

$$\begin{cases} \left|F_{p_{m,M}}(n)\right|^2 = \sum\limits_{m=0}^{M-1} d_m(n) \\ d_m(n) \triangleq C_m\cos(nm\theta) \\ C_m \triangleq \sum\limits_{k=0}^{M-1-m} 2p_{k+m}p_k, \quad C_0 = \sum\limits_{k=0}^{M-1} p_k^2 \end{cases} \tag{9}$$

同理由三角函数的递推关系可得：

$$d_m(n) = d_m(n-1)\cdot 2\cos(m\theta) - d_m(n-2) \qquad m=0, 1, \cdots M-1 \tag{10}$$

代入(9)式得：

$$\left|F_{p_{m,M}}(n)\right|^2 = \sum_{m=0}^{M-1} 2d_m(n-1)\cos(m\theta) - \left|F_{p_{m,M}}(n-2)\right|^2 \qquad n=2, 3, \cdots L-1 \tag{11}$$

可求初值：

$$\begin{cases} \left|F_{p_{m,M}}(0)\right|^2 = \sum\limits_{m=0}^{M-1} C_m \\ \left|F_{p_{m,M}}(1)\right|^2 = \sum\limits_{m=0}^{M-1} C_m\cos(m\theta) \\ d_m(0) = C_m, \quad C_m = 2\sum\limits_{k=0}^{M-1-m} p_{k+m}p_k, \quad C_0 = \sum\limits_{k=0}^{M-1} p_k^2 \\ d_m(1) = C_m\cos(m\theta) \\ d_0(n) = \sum\limits_{m=0}^{M-1} p_m^2 \end{cases} \tag{12}$$

由于$\cos(m\theta)$可预先计算好，存贮起来，故至此，通过利用三角函数的递推关系已将全部的三角函数调用转换成一般的四则运算，消除了T_M，T_A部分的运算量。这样，整个计算过程的运算量约为$\frac{1}{4}ML$次复乘法、$\frac{1}{2}ML$次复加法。

为了利用三角函数的周期性，再回到(9)式，有：

$$d_m(n) = C_m\cos\left(\frac{mn\pi}{L}\right)$$

若取：$n^*_m = L/(2m)$，则当$0 \leqslant n \leqslant n_m^*$时，有$0 \leqslant \left(\frac{mn\pi}{L}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}$，则由三角函数的周期性可知，当$n > n_m^*$时，可求$d_m(n)$的值如下：

$$\begin{cases} d_m(n) = -d_m\left(n_m^* - R\left(\frac{n}{n^*_m}\right)\right), & (4k+1)n^*_m \leqslant n < (4k+2)n^*_m \\ d_m(n) = -d_m\left(R\left(\frac{n}{n^*_m}\right)\right) & (4k+2)n^*_m \leqslant n < (4k+3)n^*_m \\ d_m(n) = d_m\left(n^*_m - R\left(\frac{n}{n^*_m}\right)\right) & (4k+3)n^*_m \leqslant n < (4k+4)n^*_m \end{cases}$$

$$k = 0,\ 1,\ \cdots N \tag{13}$$

式中，$N = \left[\frac{(L-1)}{2L}(M-1)\right] - 1$　〔·〕表示取整，　R（·）为取余函数，

显然，n^*_m应该为整数，故取

$$n^*_m = \left[\frac{L}{2m}\right] + 1, \quad m = 1,\ 2,\ \cdots M-1$$

这样，由三角函数的周期性，只需计算$|F_{p_m,M}(n)|^2$在$[0, n_m^*]$范围中的值，使(3)式约运算量进一步降低到：$\frac{1}{4}\left(\sum_{m=0}^{M-1} n_m^*\right)$次复乘法，$\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{M-1} n_m^*\right)$次复加法。并且，由于利用了周期性，减少了算法由递推运算而产生的累积误差。由（10）～（13）式即可获得最大熵谱值估计的综合快速算法。为了实现ARMA谱值的快速估计，可将（3）式代回(2)式，即得：

$$S_{ARMA}(n)\ \frac{|F_{\theta_m,q}(n)|^2}{|F_{\varphi_m,p}(n)|^2}, \quad n = 0,\ 1,\ \cdots L-1 \tag{14}$$

再分别对上式的分子和分母应用该综合算法。在实际应用中，L通常是预先确定好的值，此时可估计N为某一较大值，使得$N \geqslant M$，这样也就可预先估计出$\cos\left(\frac{m}{L}\pi\right)$（$m=0, 1, \cdots N$）的值，存贮起来；另外，L、N值确定之后，$n_m^*$（$m=1, \cdots N$）值也可预先计算，并存贮起来，从而可节省计算时间。因此，在ARMA谱（或最大熵谱）估计方法应用于过程控制、设备工作状态监测等领域的情况下，由于所建模型的形式较为简单，模型阶数较低以及模型阶数变化相对较稳定等特点，该综合算法可获得更高的计算速度和效率。图1为该算法的程序框图。

给定模型系数：

$$p_m,\ m=0,1,\cdots M-1;$$

选定L，N值，　　令$\theta\overset{\triangle}{=}\frac{\pi}{L}$

↓

对于$m=1,2,\cdots M-1$

计算：$$\begin{cases}\cos(m\theta)\\ n_m^{*}=\left[\frac{L}{2m}\right]+1\end{cases}$$

↓

对于$m=0,1,\cdots M-1$

计算：$$\begin{cases}C_m=2\sum\limits_{k=0}^{M-1-m}p_{k+m}p_k,\quad C_0=\sum\limits_{k=0}^{M-1}p_k^2\\ d_m(0)=C_m、\ d_m(1)=C_m\cos(m\theta)\end{cases}$$

$$\left|F_{p_m,M}(0)\right|^2=\sum_{m=0}^{M-1}C_m,\quad \left|F_{p_m,M}(1)\right|^2=\sum_{m=0}^{M-1}C_m\cos(m\theta)$$

↓

对于$m=1,2,\cdots M-1;\ n=0,\cdots n_m^{*}$

计算：$$\begin{cases}d_m(n)=2d_m(n-1)\cos(m\theta)-d_m(n-2)\\ d_0(n)=\sum\limits_{m=0}^{M-1}p_m^2\end{cases}$$

↓

对于　$n=2,3,\cdots L-1$

计算：$$\left|F_{p_m,M}(n)\right|^2=\sum_{m=0}^{M-1}2d_m(n-1)\cos(m\theta)-\left|F_{p_m,M}(n-2)\right|^2$$

并考虑（13）式的周期关系式

图1.　　综合算法程序框图

4　算法性能的比较

为了测试综合算法的性能，作者在计算机上用最大熵谱值估计为例进行了试验，显然，这并不失一般性。图2表示了常用各快速算法和综合算法的计算时间——模型阶数关系图。由图示结果可看出，综合算法在计算速度上是优越的．表一则列出了各算法的包括运算量、占用内存以及相对常规算法的速度增长因子等有关的综合性能参数．

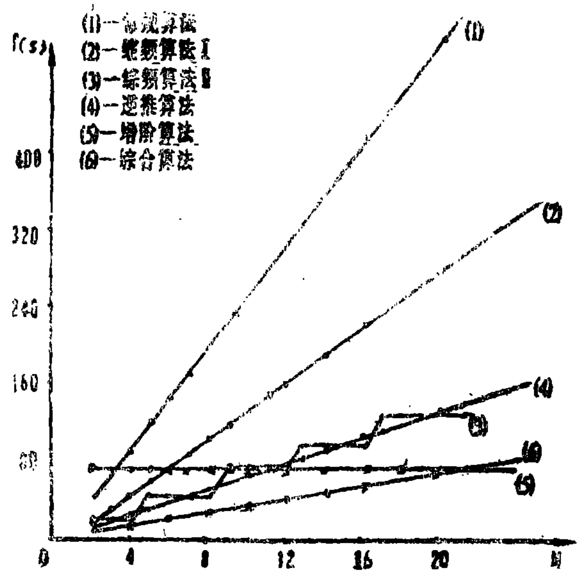

图2．各算法计算时间一模型阶数曲线图

5　结论

本文从运算量的角度出发，详细研究了常用ARMA谱（或最大熵谱）值估计快速算法的各自特点与内在联系，研究结果表明：

5.1　利用谱值估计中三角函数的周期性和三角函数间存在的递推关系是提高谱值估计速度的两条基本途径；如何综合利用这两条基本途径乃是进一步提高估计速度的关键．

5.2　理论分析与试验结果表明，本文提出的综合算法无论在计算速度上，还是在综合性能方面都是优越的。

5.3　在ARMA（或ME）谱值估计中，由于旋转因子exp(·)函数并不是一复常数，要对实际运算量计算公式进行修正；并且理论分析与试验结果证明，旋转因子的计算时间在整个谱值估计时间中占有相当的比例。

表1

性能参数 / 算法		运算量	数组内存	计算速度增长因子	备注
常规算法	复乘法次数	$LM(\frac{1}{2}+T_M)+\frac{1}{2}L$	M+L	1	
	复加法次数	$LM(\frac{1}{2}+T_A)+\frac{1}{2}L$			
增阶算法	复乘法次数	$L\log_2(2L)+\frac{1}{2}L$	M+4L	$1+\frac{2}{7}(M-3)$	1)计算速度恒定 2)不增加误差
	复加法次数	$L\log_2(2L)+\frac{1}{2}L$			
缩频算法	复乘法次数	$\frac{1}{4}ML(\frac{1}{2}+T_M)+\frac{1}{2}L$	M+L+2k	1 8k	1)k为缩频次数； 2)左边所给出的运算量公式为k=2时的情况 3)不增加误差
	复加法次数	$LM(\frac{1}{2}+T_A)+\frac{1}{2}L$			
扩展FFT算法	复乘法次数	$\frac{L}{2}([\log_2 M]+2)+\frac{1}{2}L$	M+4L	原文中未给	不增加误差
	复加法次数	$\frac{L}{2}([\log_2 M]+1)+\frac{L}{2}$			
递推算法	复乘法次数	$ML+\frac{1}{2}L$	3M+L	三倍多	增加累积误差
	复加法次数	$ML+\frac{1}{2}L$			
三角函数展开式型算法	复乘法次数	$\frac{1}{4}ML(\frac{1}{2}+T_M')+\frac{1}{2}L$	M+L+2k	近四倍	1) $\begin{cases}T_M'<T_M\\T_A'<T_A\end{cases}$ 2)增加舍入误差
	复加法次数	$\frac{1}{2}ML(\frac{1}{2}+T_A')+\frac{1}{2}L$			
综合算法	复乘法次数	$\frac{1}{4}(\sum_{m=0}^{M-1} n^*_m)$	2N+M+L	四倍以上	1) $n^*_m=[L/2m]+1$ 2)N为大于M的正整数 3)增加累积误差
	复加法次数	$\frac{1}{2}(\sum_{m=0}^{M-1} n^*_m)$			

注：　表中（·）表示取整

参 考 文 献

〔1〕 S.M.kay, S.L.Marple, "Spectrum Analysis—A Modern Perspective," Proc. IEEE. Vol. 69, PP.1380—1419, No.11 (1981).

〔2〕 林代茂，茅如海 "适于短序列最大熵谱估计的一种快速算法，"《中国科学》，A辑，第九期，第857—879页.（1983）

〔2〕 丁洪等，"最大熵谱的两种快速算法及局部表示，"《华中工学院学报》，第13卷，第5期，第55—64页（1985）.

〔4〕 R.G.Gan, etal, "An Extended FFT Algorjthm for ARMA Spectral Estimantion," IEEE, Vol. Assp—32, No.1,PP. 168—170 (1984).

〔5〕 丁洪等，"ARMA谱估计中若干问题的研究，"《华中工学院学报》，第16卷，第3期，（1988）.

〔6〕 敖消波等，"AR和MEM谱值的一种快速算法，"《信号处理》，第3卷，第3期，第171—174页，（1987）.

〔7〕 A. Van den Bos, "Alternative Interpretation of Maximum Entropy Spectral Analysis," IEEE, Vol. IT—17, No.4, PP. 493—494 (1971).

FAST ALGORITHMS FOR ARMA SPECTRUM VALUE ESTIMATION

Ding Hong Yang Shuzi Kang Yihua

(Huazhong university of Science and technology)

Abstract: The respective properties of some fast algerithms for ARMA spectram valae estimation are examined from the view of the number of operation. Through a careful analysis, it is pointed out that the comprehensive utlization of periodicity and recarrence relation of trigonometric function is an offective way to increase the speed of spectrum value estimation. It is shoun that the operation of trigonometric function occupies an important part in the whole calculation of ARMA spectrum value estimation. Furthermore, an comprehensive fast algorithm is developed on the basis of this analysis. the results provided in this paper show that this fast algorithm is effective.

key words: ARMA Spectrum Estimation, Maximu Emntropy Estimation, Spectrum Value Estimation, Fast Algorithm