非线性系统的一个稳定性判别法

朱心亮

（郑州大学）

摘要

本文用M—函数与M—矩阵的性质导出了非线性系统的一个稳定性判别法，特别，它可以应用于定常线性系统。三个例子对所得到的判别法进行了阐明。

关键词：M—函数，M—矩阵，指数稳定性。

一、基本概念与符号

本文中，用X^n表示状态空间R^n中的开集。开区域X^n称为是矩形域，如果它由

$$X^n=\{x\,|\,a<x<b\}$$

给定。其中a、b为n维常向量，且向量不等式意味着向量的对应分量都满足这个不等式。

函数$f:X^n\to R^n$称为单增或单减的，如果对$\forall x^1, x^2\in X^n$，$x^1<x^2$时，$f(x)$分别满足$f(x^1)\leqslant f(x^2)$或$f(x^1)\geqslant f(x^2)$。

$f:X^n\to R^n$称为非对角线(off-diagonally)增加的，如果对$\forall x^1$、$x^2\in X^n$，$x^1\leqslant x^2$且有相同的分量$x_i^1=x_i^2$，f的第i个分量f_i满足$f_i(x^1)\leqslant f_i(x^2)$；非对角线减少的可类似地定义。

$f:X^n\to R^n$称为逆增的，如果$f(x^1)\leqslant f(x^2)$蕴含$x^1\leqslant x^2$。

一个函数$f:X^n\to R^n$称为M—函数，如果它是非对角线减少的且是逆增的。

用$R^{n\times n}$表示一切$n\times n$实矩阵的全体。记

$$Z^{n\times n}=\{A\,|\,A=(a_{ij})\in R^{n\times n},\ a_{ij}\leqslant 0,\ i\neq j\}$$

即$Z^{n\times n}$表示一切非对角元皆非正的$n\times n$实矩阵的全体。

任何$A\in Z^{n\times n}$都易表示成

$A=sI-B$，其中$s>0$，$B\geqslant 0$(即矩阵B的一切元素非负)(1.1)

$A\in Z^{n\times n}$称为M—矩阵，将其表示成(1.1)形式时，如果有$s\geqslant\rho(B)$。($\rho(B)$表B的谱半径)

$\lambda_{max}(A^TA)$表矩阵A^TA的最大特征值。

$\|A\|_2=[\lambda_{max}(A^TA)]^{1/2}$表矩阵A的二范数或谱范数。

二、几个引理

为了得出我们的主要结果，需要引用以下几个定理，它们的证明都可以从后面所列文献中找到，故这里只给出而不再给于证明。

引理1、(ortega and Reheinboldt 1970)

如果f是一个M—函数，那么由f确定的映射是1—1的。

引理2、(NiKaido 1968)

本文1987年12月15日收到

令：$Xf^n \to R^n$是可微映射，这里X^n是R^n内的矩形域，则f是一个M-函数的充分必要条件是雅可比(Jacobi)矩阵$(\partial f/\partial x^T)$在$x^n$内处处为M-矩阵。

引理3、$A \in Z^{n\times n}$，A是非奇异M-矩阵，当且仅当A的每一特征值的实部都是正的。

设$f(x)$在系统$\dot{x}=f(x)$的平衡点x_e附近能展成台劳级数，则

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e}(x-x_e)+g(x) \tag{2.1}$$

其中$g(x)$是展开式中的高阶项，而

$$\frac{\partial f}{\partial x^T}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} A$$

引入向量$\hat{x}=x-x_e$，即得系统(2.1)的线性化方程

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} \tag{2.2}$$

为方便计，下面不妨取$x_e=0$，且方程(2.2)仍记为

$$\dot{x} = Ax \tag{2.3}$$

在一次近似基础上李雅普诺夫(Lyapunov)给出：

引理4．若(2.3)中的A阵所有特征值都具有负实部，则原非线性系统关于平衡点是渐近稳定的，且与高阶导数项无关。

三、主要结果

设非线性系统的状态方程为

$$\dot{x}=f(x),\ x(0)=x_0 \tag{3.1}$$

其中$f: X^n \to R^n$是对x连续可微的且对每一点$x_0 \in R^n$，使(3.1)有唯一解。我们称系统(3.1)关于平衡状态$x_e=0$是指数稳定的，如果存在正数ν，ε使得

$$\|x\| \leqslant \nu \|x_0\| e^{(-\varepsilon t)},\ t \geqslant 0,\ x_0=x(0) \tag{3.2}$$

定理。若系统(3.1)中的函数f为负M-函数，则非线性系统(3.1)是指数稳定的。

证：我们先证(3.1)的线性化系统

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x},\quad \hat{x}(0)=\hat{x}_0 \tag{3.3}$$

是指数稳定的。

大家知道(3.3)的状态转移矩阵为e^{At}。由初始状态$\hat{x}_0$出发的解向量$\hat{x}=e^{At}\hat{x}_0$，于是

$$\|\hat{x}\|_2^2 = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = \langle e^{At}\hat{x}_0, e^{At}\hat{x}_0 \rangle$$

$$= \langle \hat{x}_0, (e^{At})^T e^{At} x_0 \rangle = \langle \hat{x}_0, e^{(A^T+A)t}\hat{x}_0 \rangle$$

$$\leqslant \|\hat{x}_0\|_2 \| e^{(A^T+A)t} \hat{x}_0 \|_2$$

$$\leqslant \|\hat{x}_0\|_2^2 \| e^{(A^T+A)t} \|_2$$

$$= \|\hat{x}_0\|_2^2 \{\lambda_{max}[(e^{(A^T+A)t})^T e^{(A^T+A)t}]\}^{1/2}$$

$$= \|\hat{x}_0\|_2^2 \{\lambda_{max}[e^{(A^T+A)t}]^2\}^{1/2}$$

$$= \|\hat{x}_0\|_2^2 \lambda_{max}[e^{(A^T+A)t}]$$

$$= \|\hat{x}_0\|_2^2 e^{\lambda_{max}(A^T+A)t}$$

$$\therefore \quad \|\hat{x}\| \leqslant \|\hat{x}_0\| e^{\frac{1}{2}\lambda_{max}(A^T+A)t} \qquad t \geqslant 0$$

由假设f为负M-函数，由引理2知其Jacobi矩阵A为负M矩阵，由引理3得知A的每个特征值的实部均是负的，A^T与A的特征值相同，从而推知对称矩阵(A^T+A)的特征值都是负的，因此$\lambda_{max}(A^T+A)$为负的，故只需取

$$v = 1, \quad \varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}\lambda_{max}[-(A^T+A)] > 0$$

就有 $\|\hat{x}\| \leqslant v\|\hat{x}_0\| e^{-\varepsilon_1 t}, \quad t \geqslant 0$

即系统(3.3)是指数稳定的。

由定义立知指数稳定一定渐近稳定，由引理4知原非线性系统(3.1)是渐近稳定的，下证它也是指数稳定的。

设x是具有初始条件$x(o) = x_0$的(3.1)的解，则

$$\dot{x} = f(x) = Ax + g(x) \tag{3.4}$$

$\hat{x}$是具有初始条件$\hat{x}_0$的(3.3)的解

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} \tag{3.5}$$

(3.4)-(3.5)得

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) + g(x)$$

即 $\overline{x - \hat{x}}^{\bullet} = A(x - \hat{x}) + g(x)$

上式两边与$(x - \hat{x})$作内积可得

$$\frac{1}{2}\overline{\|x - \hat{x}\|^2}^{\bullet} = \langle A(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + \langle g(x), x - \hat{x} \rangle \tag{3.6}$$

令 $\varepsilon_2 = \sup \dfrac{\langle -Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$，由$-A$为M-矩阵，知$\varepsilon_2 > 0$

且由于(3.1)渐近稳定，g(x)连续，且是高阶小量，故总存在时刻T_0，及$\varepsilon_3(\varepsilon_3 < \varepsilon_2)$，使

得当 $\|x\|$ 充分小时，有 $\|g\|<\varepsilon_3\|x-\hat{x}\|$，于是由(3.6)可得

$$\frac{1}{2}\|\dot{x}-\dot{\hat{x}}\|^2\leqslant-\varepsilon_2\|x-\hat{x}\|^2+\varepsilon_3\|x-\hat{x}\|^2$$

$$=-(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\|x-\hat{x}\|^2 \qquad t\geqslant T_。$$

因此，有

$$\|x-\hat{x}\|\leqslant e-(\varepsilon_2-\varepsilon_3)t\|x_0-\hat{x}_0\| \qquad t\geqslant T_。$$

又 $\|x\|=\|x-\hat{x}+\hat{x}\|\leqslant\|x-\hat{x}\|+\|\hat{x}\|\leqslant e-(\varepsilon_2-\varepsilon_3)t\|x_0-\hat{x}_0\|+\|\hat{x}_0\|e-\varepsilon_1 t$

由此可见(3.1)是指数稳定的。证讫。

推论：若线性定常系统 $\dot{x}=AX$ 中的矩阵A是负M-矩阵，它就是指数稳定的。

证，这时由 $f(x)=Ax$，$\frac{\partial f}{\partial x^T}=A$ 为负M-矩阵即明。

这样，我们找到了非线性系统与线性系统的一个统一的稳定性判别法。本判别法的优点在于，我们只利用了f(x)的信息，或者说只利用了f(x)的一阶导数信息就可判别稳定性了。避免了构造李雅普诺夫函数且对M-矩阵A.Berman及R.JPlemmons建立了50个等价命题，在具体判别时可视其方便者取之。

当然，本判别法也只是一个充分判别法。

四、几个例子

例1.板形系统的状态方程[8]为：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{T_2} & \frac{K_\sigma}{T_2} & 0\\ 0 & -\frac{2}{\tau} & \frac{\tau}{2}K_\sigma+\frac{K_\sigma}{T_1}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

其中 T_1、T_2、τ、K_σ 皆为正数

由

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{T_2} & \frac{K_\sigma}{T_2} & 0\\ 0 & -\frac{2}{\tau} & \frac{\tau}{2}K_\sigma+\frac{K_\sigma}{T_1}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_1}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{1}{T_2} & -\frac{K_\sigma}{T_2} & 0\\ 0 & \frac{2}{\tau} & -(\frac{\tau}{2}K_\sigma+\frac{K_\sigma}{T_1})\\ 0 & 0 & \frac{1}{T_1}\end{pmatrix}$$

A的顺序主子式均大于0，故 $-A$ 为M-矩阵或者说A为负M-矩阵。由推论知平衡状态 $x_e=0$ 是指数稳定的。

例2.考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

$x_e = 0$是其唯一平衡状态。

$$由于A = \frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1+3x_2^2 \end{pmatrix}$$

显然是负M-矩阵，从而$f(x) = [-3x_1 + x_2,\ x_1 - x_2 - x_2^3]^T$

是负M-函数。因此系统关于$x_e = 0$是指数稳定的。

实际上，由$f(x)$的表达式，按M-函数的定义，也不难看出$f(x)$为负M-函数。

例3.考察非线性系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 + x_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 - x_2^5 - 4x_1x_2$$

$$由于A = \frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{pmatrix} -1-3x_1^2+x_2 & x_1 \\ -4x_2 & -2-5x_2^4-4x_1 \end{pmatrix}_{x_e=0}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

为负M-矩阵，故系统关于平衡状态$x_e = 0$是指数稳定的。

对变量较多的大系统，需借助于计算机进行判别。本文经曹策问教授审阅，指正。在此深表感谢。

参　考　文　献

〈1〉 L.K.蒂莫西，B.E.博纳，状态空间分析导论，（中译本）人民教育出版社（1981），79—84.

〈2〉 黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社（1984）.

〈3〉 ORTEGA, J.M., and REHEINBOLDT, W. C., Iterative Solution of Nonlinear Eguations in Seveval Variables, New York: ACademic press, (1970).

〈4〉 NIKAIDO, H., Convex structuctural and Economic Theory, New York ,Academic press, (1968)

〈5〉 T. MORI, A stability Criterion for linear time—varying Systems, NT, J. Control, Vol. 34, No. 3(1981), 585—588 ,

〈6〉 T. AMEMIYA, On the stability of non—linear interconnected systems, JNT, J. Control, Vol. 34, No. 3(1981), 513—515 ,

〈7〉 R. E. BeLLMAN, Stability Theory of Differential Eguations, Dover, New York, (1953) ,

〈8〉 宋维公等，钅棒调节器在板形控制系统中的应用，控制理论与应用，3卷2.期（1986）109.

A STABILITY CRITERION FOR NON-LINEAR SYSTI

Zhu Xinliang

(Zhangzhowu University)

Abstract

In this paper ,we derive an stability criterion Non-linear systems By the properties of M-function and M-matrices. Especially, It Can be applied to the linear Time-Invariant systems. Three Examples are Illustratod To the Obtained Criterion.

Keywords: M—function, M—matrices, Exponential stability.