广义测度空间上函数的平均值

陈晋健　　马汉卿

（广东民族学院）

对于广义测度，除了有类似有界变差函数的 Jordan 分解外，也有类似于全连续函数的 Newton—Leibniz公式，这就是著名的 Radon—Nikodym 定理，本文利用R—N定理，证明了广义测度空间上可积函数平均值的若干有趣的性质。

设（X，R，μ）是广义测度空间，μ（E）≠0。则所谓E上可积函数f的平均值，指的是 $\mu(E)^{-1}\int_E f d\mu$。记它作 $M_\mu(f)$。首先我们有

定理1． $[M_\mu(f)]^2\leqslant M_\mu(f^2)$

仅当f是常值函数时取等号。

证：由积分的 Cauchy—Schwarz不等式〔1〕

推知：$[\int_E f d\mu]^2\leqslant\int_E d\mu\int_E f^2 d\mu=\mu(E)\int_E f^2 d\mu$

由于 $\mu(E)\neq0$　　故

$$\mu(E)^{-2}[\int_E f d\mu]^2\leqslant\mu(E)^{-1}\int_E f^2 d\mu$$

亦即　$[M_\mu(f)]^2\leqslant M_\mu(f^2)$

下面进一步假定（X，R，μ）是全σ—有限测度空间，f在X上非负可测，则由f所定义的集函数

$$\upsilon(E)=\int_E f d\mu \qquad E\in R$$

也是（X，R）上的全σ—有限测度而且υ关于μ是全连续的。υ关于μ的R—N导数就是 f，亦即 $\frac{d\upsilon}{d\mu}=f$。〔2〕

定理2． μ，υ如上，μ（E）≠0．f是E上可积函数．则

若　$\mu(E)\upsilon(E)>0$　　则 $M_\mu(f)\leqslant M_\upsilon(f)$

若　$\mu(E)\upsilon(E)<0$　　则 $M_\mu(f)\geqslant M_\upsilon(f)$

证．由测度论中的Radon—Nikodym定理〔3〕推知．$[\int_E f d\mu]^2=\int_E f d\mu\cdot\int_E f d\mu$

$$=\int_E\cdot\frac{d\upsilon}{d\mu}d\mu\cdot\int_E f d\mu=\int_E d\upsilon\cdot\int_E f d\mu=\upsilon(E)\int_E f d\mu \qquad (1)$$

本文1987年6月30日收到。

又 $\int_E f^2 d\mu = \int_E f \cdot \frac{dv}{d\mu} d\mu = \int_E f dv$ (2)

由定理1知 $\mu(E)^{-2}[\int_E f d\mu]^2 \leqslant \mu(E)^{-1}\int_E f^2 d\mu$ 将(1)，(2)分别代入上式得

$$\mu(E)^{-2} \cdot v(E) \int_E f d\mu \leqslant \mu(E)^{-1}\int_E f dv$$

以$\frac{\mu(E)}{v(E)}$，乘上式两端得

$$M_\mu(f) \leqslant M_v(f) \qquad 若\mu(E)v(E)>0$$
$$M_\mu(f) \geqslant M_v(f) \qquad 若\mu(E)v(E)<0$$

定理3. 若μ，E，f如上且$f \neq 0[\mu]$及当n为奇数时$f>0[\mu]$ 则

$$M_\mu\left(\frac{1}{f^n}\right)\frac{1}{M\mu(f^n)}$$

证. 由积分的Cauchy--Schwarz不等式

$$[\mu(E)]^2 = [\int_E d\mu]^2 = [\int_E f^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{f^{\frac{n}{2}}} d\mu]^2$$

$$\leqslant \int_E f^n d\mu \cdot \int_E \frac{1}{f^n} d\mu \qquad \because \mu(E) \neq 0$$

$$\therefore \quad 1 \leqslant \mu(E)^{-1}\int_E f^n d\mu \cdot \mu(E)^{-1}\int_E \frac{d\mu}{f^n}$$

亦即 $M_\mu\left(\frac{1}{f^n}\right) \geqslant \frac{1}{M_\mu(f^n)}$

定理4. μ，v，E，n，f如上，则

$$M_v(f^{n-1}) \cdot M_\mu\left(\frac{1}{f^n}\right) \geqslant \frac{\mu(E)}{v(E)} \qquad 当\mu(E)v(E)>0$$

$$M_v(f^{n-1}) \cdot M_\mu\left(\frac{1}{f^n}\right) \leqslant \frac{\mu(E)}{v(E)} \qquad 当\mu(E)v(E)<0$$

证. 由定理3知$[\mu(E)]^2 \leqslant \int_E f^n d\mu \cdot \int_E \frac{d\mu}{f^n}$

又由Radon—Nikodym定理知

$$\int_E f^n d\mu = \int_E f^{n-1} f d\mu = \int_E f^{n-1}\frac{dv}{d\mu} d\mu = \int_E f^{n-1} dv$$

以此代入上式得

$$[\mu(E)]^2 \leqslant \int_E f^{n-1} dv \cdot \int_E \frac{d\mu}{f^n}$$

以$\mu(E)v(E)$除上式两端得

$$M_{\nu}(f^{n-1})\cdot M_{\mu}\left(\frac{1}{f^{n}}\right)\geqslant\frac{\mu(E)}{\upsilon(E)}\qquad 若\mu(E)\upsilon(E)>0$$

$$M_{\nu}(f^{n-1})\cdot M\left(\frac{1}{f^{n}}\right)\leqslant\frac{\mu(E)}{\upsilon(E)}\qquad 若\mu(E)\upsilon(E)<0$$

特别当n＝1时，

$$M_{\mu}(f^{-1})\geqslant\frac{\mu(E)}{\upsilon(E)}\qquad 若\mu(E)\upsilon(E)>0$$

$$M_{\mu}(f^{-1})\leqslant\frac{\mu(E)}{\upsilon(E)}\qquad 若\mu(E)\upsilon(E)<0$$

参　考　文　献

〔1〕 Tom Apostal Mathematical Analysis　1975
〔2〕 夏道行等　实变函数论与泛函分析　1984
〔3〕 Halmos Measure theory　1950
〔4〕 高柳幸贞 关于函数的平均值，《数学译林》　4卷2期　1982