第一积分中值定理的推广

侯　双　印

（郑州工学院）

提　　要

本文不仅证明了下面的第一积分中值定理：

定理　设 1）函数f（x）在[a，b]上连续；

2）函数g（x）在[a，b]上Riemann可积且不变号，则在（a，b）内至少存在一点ξ使得

$$\int_b^a f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

而且还把它推广到f（x）有第一类间断点或无穷型间断点及g（x）有界且Lebesgue可积的情形。

关键词： 第一类间断点；无穷型间断点；黎曼（Riemann）可积；勒具格（lebesgue）可积。

定理一　设1）$f(x), g(x)\in C[a,b]$；2）$g(x)>0$（$x\in[a,b]$），则在（a，b）内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

证明　因$f(x)\in C[a,b]$，所以存在x_1，$x_2\in[a,b]$使得$f(x_1)=m=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$，$f(x_2)=M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$，下面分两种情形证明定理一：

1^0　如$M=m$，则$f(x)=m$（$a\leqslant x\leqslant b$），这时有

$$\int_a^b f(x)g(x)=m\int_a^b g(x)dx$$

取（a，b）内任一值作为ξ都有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b f(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

2^0　如$M\neq m$

因　$g(x)>0$（$x\in[a,b]$），所以在[a，b]上有

$$[M-f(x)]g(x)\geqslant 0,\ [M-f(x)]g(x)\not\equiv 0$$

及

$$[f(x)-m]g(x)\geqslant 0,\ [f(x)-m]g(x)\not\equiv 0$$

又　$g(x)$，$[M-f(x)]g(x)$及$[f(x)-m]g(x)$在[a，b]上都连续，故有

$$\int_a^b g(x)dx>0, \qquad \int_a^d [M-f(x)]g(x)dx>0$$

及

$$\int_a^b [f(x)-m]g(x)dx>0$$

本文1987年6月18日收到。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

从而有

$$m=f(x_1)<\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}<f(x_2)=M$$

由连续函数的介值定理知：在x_1，x_2（$\in[a, b]$）之间，因而也在（a，b）内至少存在一点ξ使得

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(\xi) \qquad (a<\xi<b)$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

由1^0，2^0定理一得证。

推论1：设f（设$f(x)\in C[a, b]$，则在（a，b）内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a) \qquad (a<\xi<b)$$

定理二 设1）$f(x)$，$g(x)\in C[a, b]$；2）$g(x)<0$（$a\leqslant x\leqslant b$），则在（a，b）内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

证明：因$-g(x)>0$，所以由定理一知

$$\int_a^b f(x)[-g(x)]dx=f(\xi)\int_a^b -g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

故
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

证毕。定理二也可仿照定理一的证法证明。

定理三 设1）$f(x)\in C[a, b]$；2）在$[a, b]$上$g(x)$ Riemann可积且$g(x)$不变号，则在（a，b）内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b) \qquad (1)$$

在理科数学分析教材中，似乎都只证明了

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx \qquad (a\leqslant c\leqslant b) \qquad (2)$$

下面我们以（2）为已知来证明（1）式成立。

1^0设$g(x)\geqslant 0$　　（$a\leqslant x\leqslant b$）

①如果$\int_a^b g(x)dx=0$，c为（a，b）内任意一点，（2）式都成立，所以取（a，b）内任意一点作为ξ，（1）式成立。

②设$\int_a^b g(x)dx>0$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

下面我们用反证法证明（1）式成立。如果在（a，b）内不存在ξ使得（1）式成立，则

$$f(x)-f(c)\neq 0 \qquad (a<x<b) \tag{3}$$

如果$x_0\in(a,b)$有$f(x_0)-f(c)>0$，则

$$f(x)-f(c)>0 \qquad (a<x<b) \tag{4}$$

否则由连续函数的介值定理知在（a，b）内至少存在一点ξ使得$f(\xi)=f(c)$，此与（3）式矛盾，故（4）式成立。

同样可知，如果$x_1\in(a,b)$有$f(x_1)-f(c)<0$，则

$$f(x)-f(c)<0 \qquad (a<x<b)$$

以上说明：当$x\in(a,b)$时，且$f(x)-f(c)\neq 0$时，

$$f(x)-f(c)>0,\ f(x)-f(c)<0$$

最多只有一成立

下面先证明：$f(x)-f(c)>0 \quad (a<x<b)$也是不可能的。

如果$f(x)-f(c)>0 \quad (a<x<b)$，则

$$\int_a^b[f(x)-f(c)]g(x)dx>0$$

其理由如下：令

$$E=\{x\mid g(x)=0,\ x=a,\ x=b\}$$

则有

$$\int_a^b g(x)dx=\int_E g(x)dx+\int_{[a,b]-E}g(x)dx=\int_{[a,b]-E}g(x)dx>0$$

知

$$\int_a^b[f(x)-f(c)]g(x)dx=\int_E[f(x)-f(c)]g(x)dx$$
$$+\int_{[a,b]-E}[f(x)-f(c)]g(x)dx$$
$$=\int_{[a,b]-E}[f(x)-f(c)]g(x)dx>0$$

从而有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx>f(c)\int_a^b g(x)dx$$

此与(2)式矛盾，所以$f(x)-f(c)>0(a<x<b)$是不可能的。

同样可证：$f(x)-f(c)<0(a<x<b)$也是不可能的。

故(1)式在$\int_a^b g(x)dx>0$的条件下成立。

由①、②知定理三在条件$g(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$下为真。

2°设$g(x)\leqslant 0 \quad (a\leqslant x\leqslant b)$

这时$-g(x)\geqslant 0$，所以由1°的证明知在(a，b)内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)[-g(x)]dx=f(\xi)\int_a^b -g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

从而有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

即定理三在条件$g(x)\leqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$下成立。也可以用与$1^0$的证明方法类似证明。

由1^0、2^0知定理三为真，证毕。

例1，设$a>0$，则$\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^a}{1+x}dx=0$

解：由$\int_0^1 \frac{x^a}{1+x}dx=\frac{1}{1+\xi}\frac{1}{1+a}$知。　　$(0<\xi<1)$

定理四　设1）$f(x)\in c_{(a,b)}$　且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=B$（A，B均为实数）；2）在$[a,b]$上$g(x)$ Riemann可积且$g(x)$不变号，则在(a,b)内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

证明：令$F(x)=\begin{cases} A & x=a \\ f(x) & a<x<b \\ B & x=b \end{cases}$　即知定理四为真。

推论2　设$f(x)\in C_{(a,b)}$　且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=B$（A，B都为实数），则在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a<\xi<b)$$

定理五　设1）$f(x)\in C_{(a,b)}$，　且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A$（实数），$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=\infty$；

2）$\int_a^b f(x)g(x)dx$为有限定值；3）在$[a,b]$上$g(x)$ Riemann可积且$g(x)$不变号，则在(a,b)内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b) \qquad (5)$$

证明：1^0如果$\int_a^b g(x)dx=0$

这时$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，所以(a,b)内任一点作为ξ，（5）式成立。

2^0如果$\int_a^b g(x)dx>0$。

令　数列$\{\eta_n\}$满足条件：①$a<\eta_n<b$；②$\eta_{n+1}>\eta_n$；③$\eta_n\to b(n\to\infty)$，则由定理四知在(a,η_n)内至少存在一点ξ_n使得

$$\int_a^{\eta_n} f(x)g(x)\,dx = f(\xi_n)\int_a^{\eta_n} g(x)dx \qquad (a<\xi_n<\eta_n)$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^{\eta_n} f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$ = 有限定值

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{\eta_n} g(x)dx = \int_a^b g(x)dx > 0$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)$ = 有限定值

又 $a<\xi_n<\eta_n<b$，所以$\{\xi_n\}$为有界数列，故存在收敛的子数列$\{\xi n_i\}$，记

$$\lim_{i\to\infty}\xi n_i = d$$

则 $\lim\limits_{i\to\infty} f(\xi n_i) = \begin{cases} A & \text{当} d=a \\ f(d) & \text{当} a<d<b \end{cases}$

又由 $\int_a^{\eta n_i} f(x)g(x)dx = f(\xi n_i)\int_a^{\eta n_i} g(x)dx$

得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim\limits_{i\to\infty} f(\xi n_i)\int_a^b g(x)dx$

如 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_i) = f(d) \quad (a<d<b)$ 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(d)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<d<b)$$

即定理五为真。

如 $\lim\limits_{i\to\infty}(\xi n_i) = A$，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = A\int_a^b g(x)dx \tag{6}$$

下面证明在(a, b)内至少有一点ξ使得

$$f(\xi) = A \qquad (a<\xi<b) \tag{7}$$

若不然，则有

$$f(x) - A \neq 0 \qquad a<x<b$$

又有连续函数的介值定理及$\int_a^b g(x)dx>0$知

$$\int_a^b [f(x)-A]g(x)dx \neq 0$$

此与(6)式矛盾，即(7)式成立，从而有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

由1°，2°知定理五成立，证毕。

推论3：设1）$f(x)\in C(a, b)$，且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$(实数)，$\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$；

2）$\int_a^b f(x)dx$收敛，则在(a, b)内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a<\xi<b)$$

用与定理五类似的证明方法可得：

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理六　设1) $f(x)\in C(a,b)$，且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=B$(实数)；2) $\int_a^b f(x)g(x)dx$为有限定值；3)在$[a,b]$上$g(x)$ Riemann可积且$g(x)$不变号，则在(a,b)内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

推论4：设1) $f(x)\in C(a,b)$且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=B$(实数)；

2) $\int_a^b f(x)dx$收敛，则在(a,b)内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a) \qquad (a<\xi<b)$$

定理七　设1) $f(x)\in C(a,b)$且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$，2) $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=\infty$；

2) $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$为有限定值；3)在$[a,b]$上$g(x)$ Riemann 可积且$g(x)$不变号，则在(a,b)内至少存在两点ξ_1，ξ_2使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi_1)\int_a^C g(x)dx+f(\xi_2)\int_C^b g(x)dx$$

$$(a<\xi_1<c<\xi_2<b)$$

证明：
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^C f(x)g(x)dx+\int_C^b f(x)g(x)dx$$
$$=f(\xi_1)\int_a^C g(x)dx+f(\xi_2)\int_C^b g(x)dx$$

证毕。　$(a<\xi_1<c<\xi_2<b)$

推论五　设1) $f(x)\in C(a,b)$且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=\infty$；2) $\int_a^b f(x)dx$收敛，则在(a,b)内至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

证明：在定理七中取$g(x)=1$，$c=\frac{a+b}{2}$得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+f(\xi_2)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)}{2}(b-a)$$

$$\left(a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b\right)$$

当 $f(\xi_1)=f(\xi_2)$时，

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)}{2}=f(\xi_1)=f(\xi_2)$$

从而有

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi_1)(b-a)=f(\xi_2)(b-a)$$

$$(a<\xi_1<\xi_2<b)$$

当 $f(\xi_1)\neq f(\xi_2)$时，

$$\min\{f(\xi_1),\ f(\xi_2)\}<\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)}{2}<\max\{f(\xi_1),\ f(\xi_2)\}$$

所以在$(\xi_1,\ \xi_2)$内存在ξ使得

$$f(\xi)=\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)}{2}\qquad(a<\xi_1<\xi<\xi_2<b)$$

从而有

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\qquad(a<\xi<b)$$

证毕。

定理八 设1）$f(x)\in C[a,\ b]$；2）在$[a,\ b]$上$g(x)$有界，不变号且Lebesgue可积，则在$[a,\ b]$上至少存在一点C使得

$$(L)\int_E f(x)g(x)dx=f(c)\ (L)\int_E g(x)dx\tag{8}$$

其中$E=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$，$a\leqslant c\leqslant b$

证明：1^0设$g(x)\geqslant0\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$

由条件1）知存在x_1、$x_2\in[a,\ b]$使得

$$f(x_1)=m=\min_{a\leqslant x\leqslant b}f(x),\qquad f(x_2)=M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$$

且 $\quad m\leqslant f(x)\leqslant M$

所以由条件2）及1^0知

$$m\int_E g(x)dx\leqslant\int_E f(x)g(x)dx\leqslant M\int_E g(x)dx$$

①若$\int_E g(x)dx=0$，则$\int_E f(x)g(x)dx=0$，所以$[a,\ b]$上任一点作为c（8）式都成立。

②若$\int_E g(x)dx\neq0$，则$\int_E g(x)dx>0$，于是

$$m\leqslant\frac{\int_E f(x)g(x)dx}{\int_E g(x)dx}\leqslant M$$

由一元函数的介值定理知在$[a,\ b]$上至少存在一点c使得（7）式成立，即定理八在$g(x)\geqslant0\ (a\leqslant x\leqslant b)$的条件下成立。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2°设　$g(x)\leqslant 0$　　$(a\leqslant x\leqslant b)$

这时 $-g(x)\geqslant 0$　　$(a\leqslant x\leqslant b)$，所以由$1^{\circ}$知

$$\int_E f(x)[-g(x)]dx = f(c)\int_E -g(x)dx\ (a\leqslant c\leqslant b)$$

从而有

$$\int_E f(x)g(x)dx = f(c)\int_E g(x)dx \quad (a\leqslant c\leqslant b)$$

即定理八在$g(x)\leqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$的条件下也成立。也可仿照$1^{\circ}$的证明方法证明$2^{\circ}$。

由1°、2°知定理八成立。

依此定理为基础仿照定理三的证明可得

定理九　在定义八的条件下，在(a,b)内至少存在一点ξ使得

$$\int_E f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_E g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

分别仿照定理四、五、六、七的证法依次得：

定理十　设1）$f(x)\in C(a,b)$，且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=B$；

2）与定理八条件2）同，则在(a,b)内至少存在一点ξ使得

$$\int_E f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_E g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

定理十一　设1）$f(x)\in C(a,b)$，且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$（实数），$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$

2）在E上$g(x)$有界不变号且Lebesgue可积；3）$f(x)g(x)$在Lebesgue意义下为E上的可积函数，则在(a,b)内至少有在一点ξ使得

$$(L)\int_E f(x)g(x)dx = f(\xi)(L)\int_E g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

定理十二　设1）$f(x)\in C(a,b)$且$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=B$（实数）；条件2）、3）与定理十一同，则在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$使得

$$(L)\int_E f(x)g(x)dx = f(\xi)(L)\int_E g(x)dx\ (a<\xi<b)$$

定理十三　设1）$f(x)\in C(a,b)$且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$；条件2）、3）与定理十一同，则在$(a,b)$内至少存在两点$\xi_1$、$\xi_2$使得

$$(L)\int_E f(x)g(x)dx = f(\xi_1)(L)\int_{E_1} g(x)dx + f(\xi_2)(L)\int_{E_2} g(x)dx$$其中

$E_1=\{x|a\leqslant x\leqslant c\}$，$E_2=\{x|c<x\leqslant b\}$，$a<\xi_1<c<\xi_2<b$。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参 考 文 献

〔1〕Г.М、菲赫金哥尔茨：《微积分学教程》，人民教育出版社，1978.

〔2〕江泽坚、吴智泉合编《实变函数论》，人民教育出版社，1978.

〔3〕侯双印，关于Lebesgue积分中几个定理的简明证法，郑州工学院学报，（1982）NO.1，13—22.

GENERALIZED FIRST MEAN-VALUE THEOREM OF INTERGRAL

Hou Shuang—yin

(Zhengzhon Institute of Technology)

Abstract

In this paper the following result is proved:

Theorem Let 1) $f(x)$ be Continuous over Closed interal $[a, b]$;

2) $g(x)$ be Riemann intergrable function on $[a, b]$ and not sign—changed, Then there exists at least one point $\xi \in (a, b)$ such that

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Fur ther more, if $f(x)$ has discontinuity of the first kind or of infinite on $[a, b]$ and $g(x)$ is a bounded function and is Lebesgue intergrable on $[a, b]$, We can obtain similer results

Key words: Discontinuity point of the first; Discontinuity point of infinite; Riemann intergrable; Lebesgue intergrable.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net