液固耦合的边界元——样条有限点法

李庆斌　　周鸿钧

（水利系）

提　　要

本文应用样条有限点法求解固体本身的自振特性，并与边界元耦合考虑液体的影响，从而计算液固耦振时的特性。本法原理简单，使用方便，工作量小，且精度满足工程要求。

关键词： 边界元，样条有限点，液固耦合

一、引　　言

众所周知，动力计算所耗资金相当昂贵。因此，寻求一种简便而经济的算法非常必要。由于常规的有限元法和近年来发展起来的边界单元法计算工作量大，其应用受到一定的限制。样条有限点法大大降低了计算未知数，使工作量数倍降低，因而近年来得到较快的发展。

不少文献的计算结果已经表明：对于象坝体这样一类与水接触的建筑物，上游水对坝体的振动特性有较大的影响，而以往用来计算这种影响的有限差、有限元法，由于预先无法确定库水的影响范围，使得为了满足精度要求，不得不取出距坝相当远的区域来计算，这势必会带来工作量的增加，给应用造成困难。本文采用了条带区域的边界元法考虑库水影响，使计算未知数影响仅仅限制在液固接触面上，从而使工作量显著降低。

二、基本原理

1．无限长带形域流场的格林函数

文献[2]论证了无限长带形域流场上的格林函数，把位势问题在耦振的特殊条件下化为静力问题来处理，利用B. Fridman的算子函数理论，求出了用级数形式表示的满足$z=0$，$z=d$及$x=\pm\infty$各边界条件的格林函数。当在图示坐标下，并假设固体表面为直立时，其形式为

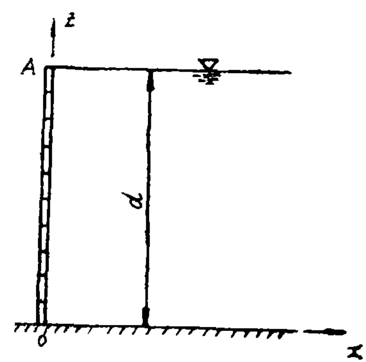

图1　液固系统图

$$\psi_i^*(0,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\triangle_n k_n}\cos k_n\eta\cos k_n z \qquad (2-1)$$

$$\frac{\partial\psi_i^*}{\partial x}(0,z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\triangle_n}\cos k_n\eta\cos k_n z \qquad (2-2)$$

本文1987年7月10日收到。

式中

$$\triangle_n = d/2$$

$$k_n = (2n-1)\pi/2d$$

显然，对图示情况，流场各边界条件只有在液固结合面上不能满足（记该面为Γ），因此在利用边界元法计算时，只需在Γ上进行单元剖分。利用边界元的位势理论，可以得到拉氏方程的边界元方程为

$$[H]\{\psi\} = [G]\{\frac{\partial\psi}{\partial x}\} \tag{2—3}$$

2．作用在固体表面上的动水压力

在耦振情况下，可以将固体表面Γ上的动水压力表示为

$$p(z,\ t) = p(z)e^{-i\omega t} \tag{2—4}$$

根据势流理论，可以通过速度势ϕ将p与ψ联系起来（详见文献[2]），其形式为

$$p(z) = i\rho\omega\psi(0,\ z) \tag{2—5}$$

根据界面节点的速度等于水质点的速度这个连续条件，可得补充方程为

$$-i\omega\{w\} = \{\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{x=0}\} \tag{2—6}$$

将式（2—6）代入式（2—3），再把结果代入式（2—5）中，得到

$$\{p\} = \rho\omega^2[H]^{-1}[G]\{w\} \tag{2—7}$$

式中ρ是液体密度，ω是系统耦振频率，w是固体的位移向量。

式（2—7）就是作用在固体表面上的动水压力计算式。

3．液体与固体的耦合

为方便起见，本文仅以梁为例来说明这种耦合方法。

梁在有荷载作用的情况下振动时，其总位能泛函可以写成

$$\pi = \frac{\pi}{2\omega}\int_0^d [EI(\frac{d^2w_0}{dz^2})^2 - 2qw_0 - 2\bar{m}w_0\frac{d^2w_0}{dt^2}]dz$$

$$= \pi_1 + \pi_2 \tag{2—8}$$

其中

$$\pi_1 = \frac{\pi}{2\omega}\int_0^d [EI(\frac{d^2w_0}{dz^2})^2 - 2\bar{m}w_0\frac{d^2w_0}{dt^2}]dz \tag{2—9}$$

$$\pi_2 = -\frac{\pi}{2\omega}\int_0^d 2q_0w_0dz \tag{2—10}$$

式中EI为梁的抗弯刚度，$\bar{m}$是梁单位长度的质量。

为了应用样条有限点法，我们将挠度表示为

$$w_0 = w(z)\sin(\omega t+\alpha) \tag{2—11}$$

$$w(z) = \sum_{i=-1}^{N+1} C_i\phi_i = [\phi]\{C\} \tag{2—12}$$

其中

$$[\phi]=[\phi_1\phi_2\cdots\phi_{N+1}]^T \qquad (2\text{—}13)$$

$$\{C\}=[C_1C_2\cdots C_{N+1}]^T \qquad (2\text{—}14)$$

已经引入z=0处梁的固支条件。

将（2—12）式代入（2—9）式，得

$$\pi_1=\frac{\pi}{2\omega}\int_0^d EI\{C\}^T[\phi'']^T[\phi'']\{C\}dz$$

$$+\frac{\pi}{2\omega}\int_0^d 2\overline{m}\omega^2\{C\}^T[\phi]^T[\phi]\{C\}dz \qquad (2\text{—}15)$$

将式（2—12）代入（2—7）式后，再代入式（2—10），得：

$$\pi_2=\frac{\pi}{2\omega}\int_0^d 2\{C\}^T[\phi]^T[Q]_m[\phi]\{C\}dz \qquad (2\text{—}16)$$

其中$[Q]_m$是矩阵$[Q]$的第m行元素，且

$$[Q]=\rho[H]^{-1}[G] \qquad (2\text{—}17)$$

把式（2—15）和式（2—16）同时代入式（2—8），并根据最小位能原理$\delta\pi=0$，得

$$[F]\{C\}=\omega^2[M]\{C\} \qquad (2\text{—}18)$$

其中

$$[F]=EI\int_0^d[\phi'']^T[\phi'']dz$$

$$[M]=[E]-[A]$$

$$[E]=2\rho\int_0^d[\phi]^T[Q]_m[\phi]dz \qquad (2\text{—}19)$$

$$[A]=2\overline{m}\int_0^d[\phi]^T[\phi]dz$$

方程（2—18）即为液固耦振的特征方程。求解此方程，即可得到系统耦振时自振频率及相应的主振型。显然，当上述方程中的$\rho=0$时，所得结果即为梁本身的自振频率和振型。

三、算 例

为了考核本法的可靠性和计算精度，本文对文献〔2〕的一个例题进行了计算，以便对比。

题中已知液体的密度为$\rho=100\text{kg}\cdot\text{sec}^2/\text{m}^3$，梁长$d=60\text{m}$,单位长度的质量$\overline{m}=2000\text{kg}\cdot\text{sec}^2/\text{m}^2$，抗弯刚度$EI=2\times10^{11}\text{kg}\cdot\text{m}^2$。并假定液体深度与梁顶齐平。利用本法将梁段布置11个节点，边界元法同样采用这些节点计算系数矩阵〔H〕、〔G〕，求得液固系统耦振的第一阶振动频率为$\omega_1=7.09$（rad/sec），而文献〔6〕算得的结果为$\omega_1=7.45$（rad/sec），两者比较，本法引起的相对误差不足5%。利用本法还可以计算更高阶的振动频率和振型，但由于现有文献没有给出结果，这里无法对比，亦没有列出计算结果。

四、结　论

通过简单计算，不难得出以下结论：

1、本文提出的方法从理论上精确地考虑了上游液体的影响，而且使计算未知数仅仅限制在液固交界面上，大大节省了计算机内存和计算工作量。

2、本法的计算量小，且精度满足工程要求，从而为解决工程实际问题提供了一条切实可行的途径。

另外，利用本文的方法原理，不难推广应用到复杂库底条件下及变截面杆的耦振计算情形，限于篇幅，这里没有给出结果。

参　考　文　献

〔1〕秦荣，结构力学的样条函数方法，广西人民出版社，1985．12．

〔2〕黄玉盈，无限长带域流场的格林函数及其在耦振中的应用，华中工学院学报，1985，1(1)，PP.83—9

〔3〕黄玉盈，边界元——有限元联合法分析水坝系统的耦联振动，第一届全国工程中的边界元法会议论文集，1985.1，重庆。

〔4〕华东水利学院，弹性力学问题的有限单元法，水利电力出版社，1978.1．

〔5〕Zhou Hong-jun, Li Qing-bin and Wang Fu-ming, Boundary Element Method for coupled Vibration Analysis of Dam—Reservoir System, Proc.3rd inter cen. on soil Dyn and Earth Eng, Princeton USA, 1987.

〔6〕郑哲敏，马宗魁，力学学报，PP.111—118，1959.2.

BOUNDARY ELEMENT—SPLINE FINITE POINT METHOD FOR COUPLE ANALYSIS OF FLUID—SOLID SYSTEM

Li Qing-bin, Zhou Hong-jun

(Department of Hgdraulic Engineering)

Abstract

In this paper, we use spline finite point method to calculate the nature frequencies of solid, Coupled with boandary element method to count on the effect of fluid, and finally get the frequencies of fluid—solid system. The results indicates that the method presented in this paper is simple to use, and is a vilid method for engineering.

Key words: Boundary element, spline finite point, Couple of fluid—solid.