

# 可压缩滤饼离心过滤速率的分析计算

周志安

(化机教研室)

## 提 要

本文的目的是在分析前人研究成果的基础上,以不同的观点和方法导出在饱和稳定流动状态下的可压缩滤饼离心过滤方程,以解决可压缩滤饼离心过滤速率的工程计算问题。

**关键词:** 可压缩滤饼, 离心过滤速率, 滤饼的渗透率, 滤饼比阻

离心过滤是一种利用离心力从流体中分离固体颗粒的过程。它与一般压力过滤相比,具有产品含湿量低、纯度高、产量大、能耗小、劳动强度低等优点。因此,近几十年来,离心过滤技术越来越受到人们的重视,发展很迅速。但是,由于离心过滤过程的复杂性和多变性,以致使离心过滤理论的研究远远落后于实践,不能适应工程设计计算的需要。在离心过滤理论研究中,一个重要的课题是找出一个能全面、准确地反映实际过滤过程的过滤方程。近几十年来,已不少人提出了离心过滤方程,特别是格雷斯(Grace)、斯托罗(Storrow)、提勒(Tiller)等人进行了卓有成效的工作,他们通过大量的实验研究来验证过滤方程,并确定过滤方程中的主要数据(如渗透率、孔隙率、滤饼比阻等),以解决过滤理论的实际应用问题。但至今还未找到一个为世所公认的,令人满意的离心过滤方程,也就是说,在目前离心过滤的设计计算中,仍然主要依靠经验或试验,特别是在可压缩滤饼的情况下更是如此。本文的目的就是在分析前人研究成果的基础上,以不同的观点和方法导出在稳定状态下可压缩滤饼的离心过滤方程,以解决可压缩滤饼离心过滤速率的工程计算问题。为此,首先简要介绍目前常用的几种离心过滤速率方程。

## 一、离心过滤速率的常用计算公式

过滤过程的实质是流体通过多孔介质的流动过程,而流体通过不可压缩的固体床层的流动规律是研究过滤过程的基础。离心过滤速率的研究也是从这个基础出发的。从达西(Darcy)定律着手,结合离心过滤的特点来解决离心过滤速率的计算问题已不少人提出过,目前常用的计算公式有以下几种:

### 1、格雷斯方程

格雷斯对离心过滤机理,特别是对滤饼的阻力和可压缩性进行了深入研究[1],1953年就提出了用压缩一渗透率装置的实验数据来解决可压缩滤饼离心过滤速率的工程计算问题。但是,他所导出的用于可压缩滤饼的离心过滤速率方程过于复杂,只有在特定情况下才

本文1987年6月8日收到。

能求解。而目前较为常用的是简化的离心过滤速率方程式〔2〕,它只适用于不可压缩滤饼,即:

$$Q^* = \frac{\pi \omega^2 \rho_f h (r_3^2 - r_1^2)}{\mu [\alpha_m \rho_s (1 - \varepsilon_m) \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{R_m}{r_3}]} \quad (1)$$

式中  $Q$ —过滤速率,即单位时间内通过滤饼的滤液量,  $\text{m}^3/\text{s}$ ;  
 $\rho_f$ 、 $\rho_s$ —滤液和固体颗粒的密度,  $\text{kg}/\text{m}^3$ ;  $\omega$ —转鼓角速度,  $\text{S}^{-1}$ ;  
 $R_m$ —过滤介质的阻力,  $1/\text{m}$ ;  $\mu$ —粘度,  $\text{N} \cdot \text{S}/\text{m}^2$ ;  
 $\alpha_m$ —滤饼的阻,  $\text{m}/\text{kg}$ ;  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_3$ 、 $h$ —其意义如图1所示,  $\text{m}$ ;  
 $\varepsilon_m$ —滤饼的孔隙率;

## 2. 斯托罗方程

在不可压缩滤饼的离心过滤速率的计算公式中,常用的还有斯托罗公式(2),即:

$$Q = \frac{\pi \omega^2 k \rho_f h (r_3^2 - r_1^2)}{\mu \ln \frac{r_3}{r_2}} \quad (2)$$

式中  $k$ —滤饼的渗透率,  $\text{m}^2$ 。其余符号同(1)式。

(1)式和(2)式的区别在于斯托罗式中没有考虑过滤介质的阻力 $R_m$ ,而格雷式中是用滤饼比阻 $\alpha_m$ ,这样就有可能用一般压缩—渗透率装置的实验数据进行计算。

另外,还有蔡特斯基(Zeitsch)法〔3〕,它所导出的公式与斯托罗式(2)完全相同,只是将斯托罗式中的 $k/\mu$ 值用 $k_i$ 表示, $k_i$ 称为固有渗透率,这样处理的好处是把原来要分别测定的渗透率 $k$ 和粘度 $\mu$ 联系起来作为一个常数值来测定,这给工程计算带来很大方便。

不论是格雷式(1),还是斯托罗式(2),它们都只能适用于不可压缩滤饼或近似于不可压缩滤饼。而且,它们都是根据简单的平衡方程式导出的。然而,从分析滤饼内部流动特性可以看出,在滤饼内部固体颗粒之间存在压缩性压力,使固体颗粒发生变形,因而滤饼受到压缩。由于滤饼中固体颗粒的变形是由于与流动有关的力引起的,也就是说,滤液的流动过程与滤饼的变形过程是相互关联的。显然,单纯用平衡方程式来建立过滤速率方程式是不全面的,是不能真实地反映实际离心过滤过程的。因此,我们认为利用流动方程式和变形方程式来分析可压缩滤饼的离心过滤过程,建立离心过滤速率方程式是比较合理的〔4〕。

## 二、可压缩滤饼离心过滤速率公式的建立

图1表示圆柱形转鼓离心过滤过程的模型,根据此模型推导公式时,我们假定:

- 1、滤饼是饱和的,即在固体颗粒间的孔隙中充满液体,并使其保持饱和和连续流动状态。
- 2、滤饼是弹性的、均质的和各向同性的。
- 3、转鼓内的液体呈轴对称稳定层流流动状态。

当圆柱形多孔转鼓以等角速度 $\omega$ 绕 $Z$ 轴旋转时,在转鼓中形成一层滤饼层,其滤液在离心力作用下穿过滤饼。在这种情况下,离心力不但在滤饼表面产生水力压力,而且在滤液流过滤饼时,对滤液和滤饼中的固体颗粒都起作用。因此,作用在滤饼任一点上的压缩应力既受

\* 原公式采用工程单位制,本文改为国际单位制

到水力压力变化的影响,也受到作用在滤液和固体颗粒上的离心力影响。现在我们取圆柱坐标系(见图1,  $r$ 、 $\theta$ 、 $Z$ ),列出滤饼微体在 $r$ 方向力的平衡方程式,即 $\Sigma F_r = 0$ ,由于轴对称关系,其应力,应变、位移都对称于 $Z$ 轴而与 $\theta$ 无关,其平衡方程式可简化为:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + [\varepsilon_m \rho_f + (1 - \varepsilon_m) \rho_s]$$

$$r\omega^2 = \frac{dp}{dr} \quad (3)$$

等式左边最后一项表示离心力项,即由于旋转而产生的每单位容积的体力。由于重力而产生的体力相对离心力而言是很小的,可忽略不计,故在 $\theta$ 和 $Z$ 方向不存在体力。 $\rho_f$ 、 $\rho_s$ 分别表示液体和固体的密度; $\varepsilon_m$ 表示滤饼的孔隙率; $\sigma_r$ 和 $\sigma_\theta$ 分别表示径向应力和周向应力,而 $P$ 表示水力压力。

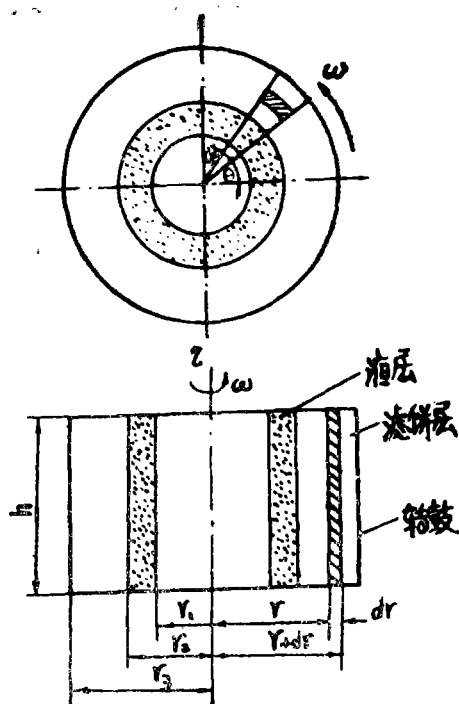


图1 离心过滤过程模型

在上述条件下,应变分量只与 $r$ 方向的位移 $U_r$ 有关。因此,体积应变 $\varepsilon$ 为:

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{dU_r}{dr} + \frac{U_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rU_r) \quad (4)$$

根据虎克(Hooke)定律,应力分量与应变分量的关系[5]为:

$$\sigma_r = 2\mu' \varepsilon_r + \lambda' \varepsilon = (2\mu' + \lambda') \frac{dU_r}{dr} + \lambda' \frac{U_r}{r} \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = 2\mu' \varepsilon_\theta + \lambda' \varepsilon = (2\mu' + \lambda') \frac{U_r}{r} + \lambda' \frac{dU_r}{dr} \quad (6)$$

$$\sigma_z = \lambda' \varepsilon = \lambda' \left( \frac{dU_r}{dr} + \frac{U_r}{r} \right) \quad (7)$$

式中 $\lambda'$ 和 $\mu'$ 为拉美(Lame)常数,利用上述应力—应变关系,变形方程式(4)可写成:

$$\frac{d\varepsilon}{dr} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rU_r) \right] = \frac{1}{(2\mu' + \lambda')} \frac{dp}{dr} - \frac{\omega^2 r [\varepsilon_m \rho_f + (1 - \varepsilon_m) \rho_s]}{(2\mu' + \lambda')} \quad (8)$$

式中 $\frac{1}{2\mu' + \lambda'}$ 表示滤饼的可压缩性,并用 $a$ 表示。

滤液通过滤饼中的孔隙作饱和稳定流动,假定液体是不可压缩的,则流体连续性方程式

可表示为〔2〕:

$$\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

若转鼓内液体呈轴对称稳定层流流动状态, 其速度分量 $u_r$ 、 $u_\theta$ 、 $u_z$ 仅与半径 $r$ 有关, 而与 $\theta$ 、 $z$ 和时间无关, 因此, 连续性方程式可简化成:

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = 0 \quad (10)$$

式中 $u_r$ 即为滤液通过滤饼孔隙的速度 (m/s), 它相当于单位时间、单位面积的体积流量  $q$ 。其值可由达西定律确定:

$$q = u_r = -\frac{k}{\mu} \frac{d}{dr} \left( p - \rho_f \frac{\omega^2 r^2}{2} \right) \quad (11)$$

式中 $k$ 是滤饼的渗透率,  $\mu$ 是滤液的粘度, 而 $(p - \rho_f \frac{\omega^2 r^2}{2})$ 相当于滤液通过滤饼的推动力,

其中 $p$ 为水力压力,  $\frac{\rho_f \omega^2 r^2}{2}$ 为离心压力, 单位均为 $N/m^2$ 。将(11)式代入(10)式, 我们得到:

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} - 2\rho_f \omega^2 = 0 \quad (12)$$

通过以上分析, 我们得到变形方程式(8)和流动方程式(12), 通过联立解这两个方程式, 就可得到沿可压缩饱和滤饼任一半径处径向位移 $U_r$ 、径向应力 $\sigma_r$ 、水力压力 $p$ 和滤液速度 $q$ 的计算公式, 以及离心过滤速率方程。

现在我们将(12)式改写成:

$$r^2 \frac{d^2 p}{dr^2} + r \frac{dp}{dr} = Ar^2 \quad (13)$$

式中  $A = 2\rho_f \omega^2$

令 $r = e^B$ ,  $B = \ln r$ , 而  $\frac{dB}{dr} = \frac{1}{r}$ , 将此关系代入(13)式, 并经整理可得:

$$\frac{d^2 p}{dB^2} = Ae^{2B} \quad (14)$$

(14)式为二阶非齐次微分方程, 它的齐次解为:

$$p_H = C_1 B + C_2 \quad (15)$$

而方程(14)的一个特解为:

$$p_P = A_1 e^{2B} \quad (16)$$

式中 $A_1$ 值, 可将(16)式代入(14)式求得, 即:

$$A_1 = \frac{\rho_f \omega^2}{2} \quad (17)$$

故方程(14)的通解为:

$$p = p_H + p_F = C_1 B + C_2 + A_1 e^{2B}$$

$$\text{即} \quad p = C_1 \ln r + C_2 + \frac{\rho_f \omega^2 r^2}{2} \quad (18)$$

式中积分常数 $C_1$ 和 $C_2$ 可以用 $r=r_2$ 和 $r=r_3$ 处的边界条件求得。

通过滤饼的滤液量 $Q$ 可由积分 $q$ 求出, 即:

$$Q = \int_{r_2}^{r_3} 2\pi h q dr \quad (19)$$

式中 $h$ 是滤饼的高度,  $q$ 由(11)式求得, 现将(18)式代入(11)式得:

$$q = -\frac{k C_1}{\mu r} \quad (20)$$

将(20)式代入(19)式, 即可求得通过滤饼的滤液量, 即:

$$Q = -\frac{2\pi h k}{\mu} C_1 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \quad (21)$$

利用边界条件求出上式中的常数 $C_1$ 、 $C_2$ 。

$$\text{在 } r=r_2 \text{ 处, } p = \frac{\rho_f \omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2)$$

$$\text{在 } r=r_3 \text{ 处, } p = 0$$

由(18)式可得:

$$C_1 = \frac{\left\{ -\left( \frac{\omega^2 \rho_f r_3^2}{2} \right) - \left[ \frac{\omega^2 \rho_f (r_2^2 - r_1^2)}{2} - \frac{\omega^2 \rho_f r_2^2}{2} \right] \right\}}{\ln(r_3/r_2)} \quad (22)$$

$$C_2 = \left[ -\left( \frac{\omega^2 \rho_f r_3^2}{2} \right) - (\ln r_3) C_1 \right]$$

于是(21)式可写成:

$$Q = \frac{\pi k \omega^2 h \rho_f (r_3^2 - r_1^2)}{\mu} \quad (24)$$

利用变形方程式(8)、流动方程式(12)和(5)式得到的径向位移 $U_r$ 和径向应力 $\sigma_r$ 分别为:

$$U_r = a C_1 \frac{r}{4} [2 \ln r - 1] + a (C_2 + C_3) \frac{r}{2} + \frac{a \omega^2 r^3}{8} (\rho_f - \rho_m) + \frac{C_4}{4} \quad (25)$$

$$\sigma_r = (2\mu' + \lambda') \frac{dU_r}{dr} + \lambda' \frac{U_r}{r} \quad (26)$$

式中  $\rho_m = \varepsilon_m \rho_f + (1 - \varepsilon_m) \rho_s$ , 积分常数  $C_3$  和  $C_4$  也是由  $r = r_2$ ,  $r = r_3$  处的边界条件确定[4]。

以上得到的(18)式、(20)式、(25)式和(26)式分别表示水力压力  $p$ 、滤液速度  $q$ 、径向位移  $U_r$  和径向应力  $\sigma_r$  随滤饼半径  $r$  变化的规律, 它们可用来描述可压缩饱和滤饼在稳定状态下的离心过滤过程, 而(24)式即为本文导出的离心过滤速率方程。

### 三、结论和说明

1、本文在流动方程式和变形方程式的基础上, 利用达西定律导出的离心过滤速率方程式(24)可用于在稳定状态下可压缩滤饼离心过滤速率的计算, 它比格雷斯导出的公式[2]简单, 而且比单纯按简单的平衡方程式导出的公式更符合实际。

2、比较(24)式和(2)式可看出, 在物料参数相同的情况下, 按本文导出的离心过滤速率式(24)所得结果  $Q_c$  为斯托罗式(2)所得结果  $Q_s$  的  $\ln r_3/r_2$  倍, 即  $Q_c = (\ln r_3/r_2) Q_s$ 。对于一般过滤式离心机, 滤饼厚度 (即  $r_3 - r_2$ )  $< 200\text{mm}$ , 此时  $\ln r_3/r_2 < 1$ , 因而  $Q_c < Q_s$ , 即按(24)式算出的离心过滤速率较小。这与 Corapcioglu 的理论分析结果[4]是一致的。

3、在物料参数一定的情况下, 按本文公式得出的滤液速度  $q$  和水力压力  $p$  随半径  $r$  变化的情况如图2、图3所示。由图可知,  $q$  和  $p$  都随  $r$  的增加而减小, 其减小的程度随角速度  $\omega$  的不同而异。而且还可看出, 在半径  $r$  一定时,  $q$  和  $p$  都是  $\omega$  的函数, 随  $\omega$  增加而增加, 这与理论分析的结论也是一致的。

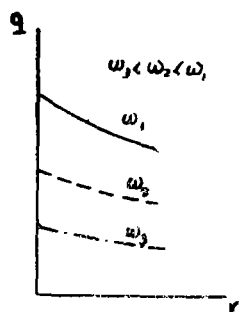


图2 不同  $\omega$  时  $q$  与  $r$  的关系

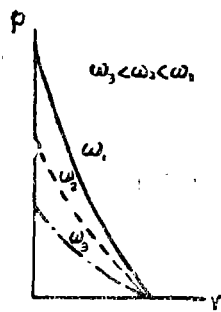


图3 不同  $\omega$  时  $p$  与  $r$  的关系

### 参 考 文 献

- [1] H.P.Grace: 《Chemical Engineering Progress》, 1953年
- [2] 孙启才、金鼎五主编: 《离心机原理结构与设计计算》. 机械工业出版社, 1987年
- [2] L.Svarovsky :《Solid—Liquid Separation》, 1977年
- [4] M.Y.CoraPcioglu: 《Steady state centrifugal Cake filtration, "Filtration and Separation"》, 1985年
- [5] 刘北辰, 陆鸿森编: 《弹性力学》, 冶金工业出版社, 1979年

# ANALYTICAL CALCULATIONS OF COMPRESSIBLE CAKE CENTRIFUGAL FILTRATION RATE

Zhou zhian

(Chemical Engineering Department)

## Abstract

This paper is directed toward deriving compressible Cake Centrifugal filtration equation under Saturated Steady flow state on the basis of analyzing earlier studied works at different view and method, To solve engineering Calculations of compressible Cake Centrifugal filtration rate.

**key words:** Compressible filter cake, centrifugal filtration speed penetration coefficient filter cake, filter cake specific obstruction

---

(上接84页)

# THE RELATION OF PHASE QUANTITY AND THE CHARACTER OF POWER IN THE POLYPHASE CIRCUIT

Liu Taihe

(Electrotechnics Teaching Group)

## Abstract

The relation between phase quantity and line quantity in the polyphase Circuit is the first problem to analysis this kind of Circuit. According to the structure character, this article uses analytical method of phase quantity to set up the phase-Line relation of star- and mesh-connection connection, the operational formula of power. It makes it easy to compute the quantity and phase relation between line quantity of each phase and phase quantity of reference in the poly phase circuit without drawing the phase diagram.

**Key Words:** polyphase circuit, phase quantity, line quantity.