用加权残数法求解环形板的极限荷载

刘福林

（辽宁大学）

摘　要

本文将加权残数法应用于结构的塑性极限分析。针对环形板的不同支承条件，从其承受环形荷载的一般情况出发，分别选择一次、二次、三次多项式为试函数，采用加权残数法的子域法求出了环形板在各种条件下的极限荷载。文中通过例题说明了用加权残数法求极限荷载的方法和过程，并且显示了该方法的简单性及优越性。

关键词：环板，屈服条件，试函数，残值，极限荷载。

一、方法概述

塑性极限分析问题始终是人们非常关心的问题，它在结构和机械设计中有着广泛的应用，它可以为确定结构的安全度或进行极限设计提供可靠的数据。由于塑性物理关系是非线性的，在对结构进行塑性极限分析时往往要遇到许多数学上的困难。因此，研究与探讨塑性极限分析的计算方法具有非常重要的意义。

加权残数法是求解微分方程近似解的一种数学方法。近年来该方法在力学界得到广泛应用，本文是想把该方法应用于塑性力学中的极限分析，通过例题来说明用加权残数法求极限荷载的方法和过程。加权残数法的基本思想是先假设一组解(称为试函数)，将其代入实际问题的控制微分方程和边界条件或其它限制条件。若试函数满足方程，则该试函数就为完全解；一般地，假设的试函数不会满足方程，从而产生误差，称为残数或残值。然后选择相应的权函数，让其控制残值在整个求解区域内按一定的方式消除掉。在消除残值的过程中，得到一组包含试函数中待定系数的方程组，由此就可求出待定系数，从而确定了试函数，此试函数就可作为控制微分方程的近似解。

将加权残数法应用到塑性极限分析问题中与应用到弹性力学问题中相比，不同的，除了需考虑屈服条件外，出发点也不同，即在塑性极限分析中出发点不是试函数的确定，而是求极限荷载。

本文主要是采用加权残数法中的子域法来求环形板的极限荷载，其计算方法如下：

设所研究对象的平衡微分方程为

$$Fu-f=0 \qquad (V域内) \tag{1}$$

边界条件：

$$Gu-g=0 \qquad (边界面S) \tag{2}$$

屈服条件：

$$\phi(Q_1, Q_2, \cdots, Q_m)=B \tag{3}$$

本文1987年6月6日收到.

$$
\begin{cases}
\dfrac{d(rM_r)}{dr}-M_\theta=0\,, & a_0\leqslant r\leqslant b_0 \\
\dfrac{d(rM_r)}{dr}-M_\theta=-\dfrac{1}{2}qr^2+\dfrac{1}{2}qb_0{}^2 & b_0\leqslant r\leqslant c_0 \\
\dfrac{d(rM_r)}{dr}-M_\theta=\dfrac{1}{2}qb^2{}_0-\dfrac{1}{2}qC^2{}_0\,, & C_0\leqslant r\leqslant b
\end{cases}
$$

为了讨论方便，可写成无量纲的形式：

$$
\begin{cases}
\dfrac{d(rm_r)}{dr}-m_\theta=0 & \dfrac{a_0}{b}\leqslant r\leqslant \dfrac{b_0}{b} \\
\dfrac{d(rm_r)}{dr}-m_\theta=3pb^2{}_0-3pb^2r^2\,, & \dfrac{b_0}{b}\leqslant r\leqslant \dfrac{C_0}{b} \\
\dfrac{d(rm_r)}{dr}-m_\theta=3pb^2{}_0-3pC^2{}_0\,, & \dfrac{C_0}{b}\leqslant r\leqslant 1
\end{cases}
\tag{9}
$$

其中m_r、m_θ、r均为无量纲的量，$m_r=\dfrac{M_r}{M_s}$，$m_\theta=\dfrac{M_\theta}{M_s}$，$p=\dfrac{q}{6M_s}$，$0\leqslant r\leqslant 1$，$M_s$为极限弯矩。

屈服条件：采用最大弯矩屈服条件

$$m_\theta=1 \tag{10}$$

边界条件：

$$m_r\left(\frac{a_0}{b}\right)=0,\quad m_r(1)=0 \tag{11}$$

假设试函数：

$$
\begin{cases}
m_{r1}=a_1\left(\dfrac{a_0}{b}-r\right), & \dfrac{a_0}{b}\leqslant r\leqslant \dfrac{b_0}{b} \\
m_{r2}=a_2r+a_3r^3, & \dfrac{b_0}{b}\leqslant r\leqslant \dfrac{c_0}{b} \\
m_{r3}=a_4(1-r), & \dfrac{c_0}{b}\leqslant r\leqslant 1
\end{cases}
\tag{12}
$$

其中a_1、a_2、a_3、a_4为四个待定系数。显然，所假设的试函数(12)式满足边界条件(11)式。

将试函数(12)式代入平衡方程(9)中，可分别求出弯矩m_θ：

$$
\begin{cases}
m_{\theta 1}=a_1\dfrac{a_0}{b}-2a_1r, & \dfrac{a_0}{b}\leqslant r\leqslant \dfrac{b_0}{b} \\
m_{\theta 2}=2a_2r+3(a_3+pb^2)r^2-3pb^2{}_0, & \dfrac{b_0}{b}\leqslant r\leqslant \dfrac{c_0}{b} \\
m_{\theta 3}=a_4-3pb^2{}_0+3pC^2{}_0-2a_4r, & \dfrac{c_0}{b}\leqslant r\leqslant 1
\end{cases}
\tag{13}
$$

再根据屈服条件(10)式可求出三个区域内的残值如下：

$$\begin{cases} R_1=(1-a_1\frac{a_0}{b})+2a_1 r, & \frac{a_0}{b}\leqslant r\leqslant\frac{b_0}{b} \\ R_2=(1+3pb^2{}_0)-2a_2 r-3(a_3+pb^2)r^2, & \frac{b_0}{b}\leqslant r\leqslant\frac{c_0}{b} \\ R_3=(1-a_4+3pb^2{}_0-3pbC^2{}_0)+2a_4 r, & \frac{C_0}{b}\leqslant r\leqslant 1 \end{cases} \tag{14}$$

在三个区域内分别消除残值，方程如下：

$$\int_{\frac{a_0}{b}}^{\frac{b_0}{b}} R_1 dr=0;$$

$$b_0 a_1+b=0 \tag{15}$$

$$\int_{\frac{b_0}{b}}^{\frac{c_0}{b}} R_2 dr=0;$$

$$b(b_0+C_0)a_2+(b_0{}^2+bb_0+C_0{}^2)a_3-b^2-p(2b_0{}^2-b_0C_0-C^2{}_0)b^2=0 \tag{16}$$

$$\int_{\frac{C_0}{b}}^{1} R_3 dr=0;$$

$$C_0 a_4+b(1+3pb^2{}_0-3pC^2{}_0)=0 \tag{17}$$

上述三式中有五个未知数：a_1、a_2、a_3、a_4、p，为了求出这些未知数，还需要补充两个方程。补充的方程可采用加权残数法中的其它方法，例如配点法，但选择的配点不易选得合适，容易出现误差或误差较大。本文中主要利用连续条件来建立补充方程：

$$r=\frac{b_0}{b},\qquad m_{\gamma1}=m_{\gamma2};$$

$$bb_0a_2+b^2{}_0a_3=b(a_0-b_0)a_1 \tag{18}$$

$$r=\frac{C_0}{b},\qquad m_{\gamma2}=m_{\gamma3};$$

$$bC_0a_2+C^2{}_0a_3=b(b-C_0)a_4 \tag{19}$$

由(15)——(19)式可求出a_1、a_2、a_3、a_4、p。因本文目的主要是求极限荷载，故只求出p即可：

$$p=\frac{(b-a_0)(b_0+c_0)}{(c^2{}_0-b^2{}_0)[3b(b_0+c_0)-2(b^2{}_0+b_0c_0+c_0{}^2)]} \tag{20}$$

$q^*p=\dfrac{q}{6M_s}$，所以，所求的极限荷载为

$$q^*=\frac{6(b-a_0)(b_0+c_0)M_s}{(c_0^2-b_0^2)[3b(b_0+c_0)-2(b_0+b_0c_0+c_0^2)]}\tag{21}$$

由公式(21)很容易推广到常见的简支园板的极限荷载：

(i)如果均布荷载q分布于整个环形板面上时，即$b_0=a_0$，$c_0=b$，则由(21)式得到其极限荷载为

$$q^*=\frac{6M_s}{b^2+ba_0-2a_0^2}\tag{22}$$

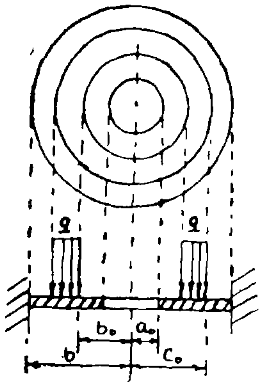

图 2

(ii)如果实心简支园板作用有均布荷载q时，即$a_0=0$，则由(22)式得到其极限荷载为

$$q^*=6\frac{M_s}{b^2}\tag{23}$$

〔算例2〕：当算例1的环形园板的支承条件改为固定支承时，如图2。用加权残数法求其极限荷载。

平衡微分方程及屈服条件与算例1中的(9)、(10)式相同。

边界条件：

$$m_r\left(\frac{a_0}{b}\right)=0,\quad m_r(1)=-1\tag{24}$$

选择二次多项式为试函数：

$$\begin{cases} m_{r1}=a_1r\left(\dfrac{a_0}{b}-r\right), & \dfrac{a_0}{b}\leqslant r\leqslant\dfrac{b_0}{b} \\ m_{r2}=a_2r+a_3r(1-r), & \dfrac{b_0}{b}\leqslant r\leqslant\dfrac{c_0}{b} \\ m_{r3}=-1+a_4r(1-r), & \dfrac{c_0}{b}\leqslant r\leqslant 1 \end{cases}\tag{25}$$

将(25)式代入平衡方程(9)式，可求出相应的内力$m_{\theta1}$、$m_{\theta2}$、$m_{\theta3}$，再由屈服条件(10)式得到三个区域内所产生的残值：

$$\begin{cases} R_1=1-2a_1\dfrac{a_0}{b}r+3a_1r^2, & \dfrac{a_0}{b}\leqslant r\leqslant\dfrac{b_0}{b} \\ R_2=(1+3pb_0^2)-2(a_2+a_3)r+3(a_3-pb^2)r^2, & \dfrac{b_0}{b}\leqslant r\leqslant\dfrac{c_0}{b} \\ R_3=(2+3pb_0^2-3pc_0^2)-2a_4r+3a_4r^2, & \dfrac{c_0}{b}\leqslant r\leqslant 1 \end{cases}$$

消除残值的方程：

$$\int_{\frac{a_0}{b}}^{\frac{b_0}{b}} R_1 dr = 0;$$

$$b^2{}_0 a_1 + b^2 = 0$$

$$\int_{\frac{b_0}{b}}^{\frac{c_0}{b}} R_2 dr = 0;$$

$$b(b_0 + c_0)a_2 - [b^2{}_0 + b_0 c_0 + c^2{}_0 - b(b_0 + c_0)]a_3 - b^2 + p(c^2{}_0 + b_0 c_0 - 2b^2{}_0)b^2 = 0$$

$$\int_{\frac{c_0}{b}}^{1} R_3 dr = 0;$$

$$c^4{}_0 a_4 + b^2(2 + 3pb^2{}_0 - 3pc^2{}_0) = 0$$

再利用弯矩的连续性条件建立两个补充方程：

$$r = \frac{b_0}{b},\ m_{r1} = m_{r2};$$

$$ba_2 + (b - b_0)a_3 = (a_0 - b_0)a_1$$

$$r = \frac{c_0}{b},\ m_{r2} = m_{r3};$$

$$bc_0 a_2 + c_0(b - c_0)a_3 = -b^2 + c_0(b - c_0)a_4$$

由上述五式可求出p或极限荷载q*：

$$p = \frac{(2b - a_0)(b_0 + c_0)}{(c^2{}_0 - b^2{}_0)[3b(b_0 + c_0) - 2(b^2{}_0 + b_0 c_0 + c^2{}_0)]} \tag{26}$$

$$q^* = \frac{6(2b - a_0)(b_0 + c_0)M_s}{(c^2{}_0 - b^2{}_0)[3b(b_0 + c_0) - 2(b^2{}_0 + b_0 c_0 + c^2{}_0)]} \tag{27}$$

由公式(27)可求出常见的固支园板的极限荷载：

(i)当均布荷载q分布于整个固定环形板面上时，即$b_0 = a_0$，$c_0 = b$，由(27)式可求出其极限荷载：

$$q^* = \frac{6(2b - a_0)M_s}{(b - a_0)^2(b + 2a_0)} \tag{28}$$

(ii)若实心固支园板作用有均布荷载q时，即$a_0 = 0$，则由(28)式得其极限荷载为

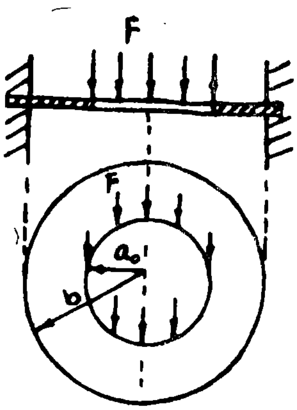

图 3

$$q^* = 12\frac{M_s}{b^2} \tag{29}$$

[算例3]、一个内外半径分别为a_0与b的环形固支园板，在其内边上作用有均布压力F，如图3。用加权残数法求其极限荷载：

平衡微分方程：

因在$a_0 \leqslant r \leqslant b$处，$Q_r = -F$，$rQ_r = -a_0F$。所以，由(9)式得其平衡方程为

$$\frac{d(rM_r)}{dr} - M_\theta = -a_0F$$

或写成无量纲的形式：

$$\frac{d(rm_r)}{dr} - m_\theta = -\frac{a_0F}{M_s}, \quad \frac{a_0}{b} \leqslant r \leqslant 1 \tag{30}$$

屈服条件和边界条件与算例2相同。

试函数：

$$m_r = \frac{b}{b-a_0}\left(\frac{a_0}{b} - r\right) + a_1\left(\frac{a_0}{b} - r\right)(1-r); \quad \frac{a_0}{b} \leqslant r \leqslant 1, \tag{31}$$

该式满足边界条件。将(37)式代入(30)式：

$$m_\theta = \left(\frac{a_0}{b-a_0} + \frac{a_0}{b}a_1 + \frac{a_0}{M_s}F\right) - 2\left(a_1 + \frac{a_0}{b}a_1 + \frac{b}{b-a_0}\right)r + 3a_1r^2$$

由屈服条件得到残值：

$$R = 1 - m_\theta$$

$$= \left(1 - \frac{a_0}{b-a_0} - \frac{a_0}{b}a_1 - \frac{a_0}{b}F\right) + 2\left(a_1 + \frac{a_0}{b}a_1 + \frac{b}{b-a_0}\right)r - 3a_1r^2$$

列出消除残值的方程式：

$$\int_{\frac{a_0}{b}}^{1} R\,dr = 0\ ;$$

$$a_0(b-a_0)F = (2b-a_0)M_s$$

由于试函数选择得比较合适，故上式中已不包含待定系数a_1了。可由上式直接求出极限荷载为

$$F^* = \frac{2b-a_0}{a_0(b-a_0)}M_s \tag{32}$$

此时的总压力为

$$p^{*}=2\pi a_{0}F^{*}=\frac{2\pi(2b-a_{0})}{b-a_{0}}M_{s} \tag{33}$$

如果园板为实心的，即$a_0=0$，由(33)式可得到固支园板在其中心作用有集中力p时的极限荷载：

$$p^{*}=4\pi M_{s} \tag{34}$$

三、结束语

1.本文用加权残数法的子域法求出了环形园板在不同支承条件和不同载荷情况下的极限荷载，进而还得到园板在均布荷载作用下的极限荷载。

2.本文中的计算结果(20)、(21)、(22)、(26)、(27)、(28)式与〔2〕、〔5〕中的结果一致。(23)式与〔2〕—〔7〕中结果一致，(25)式与〔2〕、〔5〕中结果一致，(32)、(33)、(34)式与〔3〕中结果一致。

3.本文中只选择了简单的试函数(一次、二次、三次多项式)为试函数，而均计算出满意的计算结果。由此看出，用加权残数法求解塑性变形时的极限荷载是行之有效的，并且还具有简单、方便、精度较高等优点。

4.利用加权残数法求极限荷载时，在消除残值的代数方程组中，除了含有n个未知的待定系数外，还包含本题目待求的荷载q或p。因此，要补充够方程个数才能求解。一般地，利用连续性条件列补充方程较为方便、准确。若没有连续性条件可利用，可用加权残数法中的其它方法(例如配点法)列出补充方程。

本文在完成过程中，得到了东北工学院张强教授的大力支持和指导，审阅了初稿并提出了宝贵意见，在此表示致谢。

参 考 文 献

〔1〕 徐次达、华伯洁，固体力学有限元理论、方法及程序，水利电力出版社，1983，307—323。

〔2〕 徐秉业、刘信声编著，结构塑性极限分析，中国建筑工业出版社，1985，129—184。

〔3〕 〔英〕R.A.C斯莱特著，王仲仁、袁祖培等译，工程塑性理论及其在金属成形中的应用，机械工业出版社，1983，484—489。

〔4〕 徐秉业主编，弹性与塑性力学—例题和习题，机械工业出版社，1982，622—629。

〔5〕 刘信声、徐秉业，工程塑性力学选讲，清华大学出版社，1986，40—59。

〔6〕 王仁、黄文彬著，塑性力学引论，北京大学出版社，1982，135—142。

〔7〕 卡恰诺夫，周承倜译，塑性理论基础，人民教育出版社，1983，321—331。

（下转第45页）

Wang Lingli　Zhao Caifu　ke Jingtang

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract

The sandwich holographic interferometry was first proposed by Prof. Nils Abramson, He studied the in-plane and out-of-plane displacements of object in special cases. In this paper, the general formulas of in-plane displacements, and the straines, stresses caused by in-plane displacements was obtained. Computation of stresses due to in-plane deformation by means of derivatives of second order of contours of equal displacements, or second order derivatives of the fringes, are also presented. Measuring Object's displacements and stresses by using of sandwich holographic interferometry has many advantages over other holographic interferometries.

Key words: Sandwich Holographic Interferometry, Compensated plate.

(上接第38页)

TO FIND THE SOLUTION OF THE LIMIT LOAD OF ANNULAR PLATES BY USING THE WEIGHTED-RESIDUAL METHOD

Liu Fulin

(Liaoning University)

Abstract

In this paper, the method of weighted residual is applied to the structural plastic limit analysis. By starting from the general case of annular plates bearing the annular load, using the subdomain method in the weighted residual method, choosing simple trial functions (first, second, third-degree polynomial), we have found the solution of the limit load of annular plates on their various supporting conditions.

Key Words: annular plates, yield condition, trial function, residual, limit load.

其中u为待求函数，F及G为微分算子，f及g为不含u的已知函数，Q_j（j＝1，2，…，m）为广义力，例如本文为板中内力M_r、M_θ，B为常数。

先假设满足边界条件(2)的试函数：

$$\tilde{u}=\sum_{j=1}^{n}C_j N_j \tag{4}$$

式中C_j为待定系数，N_j为试函数项。

本文试函数$\tilde{u}$也为板中广义力M_r、M_θ中之一。(4)式代入(1)式可求出另一个广义力，然后再代入屈服条件(3)中。一般地，假设的和求出的广义力不会正好满足屈服条件(3)，于是将产生残值：

$$R=B-\phi(Q_1,Q_2,\cdots,Q_m)\neq 0 \tag{5}$$

选择相应的权函数W，让其控制残值的消除。采用子域法，是把物体的域V分成不同的子域V_k(k＝1，2，…，l)，分区域选择试函数和权函数。权函数为

$$W_k=\begin{cases}1 & (\text{在}V_k\text{域内})\\ 0 & (\text{在}V_k\text{域外})\end{cases} \tag{6}$$

消除残值的方程式为

$$\int_{V_k}R_kW_k\,dV=\int_{V_k}R_k\,dV=0 \tag{7}$$

式中R_k是域V_k内的残值。(7)式是一组代数方程组，据此可求出试函数$\tilde{u}_k$中的待定系数，进而确定近似解。

在方程组(7)式中，除了有待定系数是未知的外，还有荷载q或p也是未知的，并且它正是本题目待求的。因此，只用子域法一般不能求出荷载，还需运用其它条件或方法列出补充方程，例如连续性条件和配点法等，才能求出极限荷载。

二、算　例

本文所涉及的环板材料均为刚塑性材料。

〔算例1〕：设内半径分别为a_0和b的环形园板上作用有环形的均匀分布荷载q，如图1。用加权残数法求其极限荷载。

平衡微分方程：

$$\frac{d(rM_r)}{dr}-M_\theta=rQ=-\int_0^r qr\,dr \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

对于该问题，根据荷载的作用情况，可分三个区域写出其平衡微分方程：

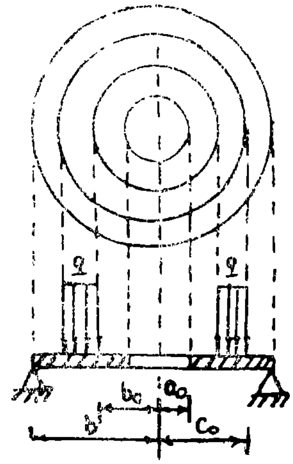

图1