一类拟抛物抛物型耦合方程的边值问题

董　立　群

（河南数学研究所）

本文研究了一类拟抛物抛物型耦合方程，给出了其弱广义解的定义，并证明了这种解的存在唯一性。

在物理、化学、生物学及工程技术中经常出现耦合问题。近年来，一些文献讨论了抛物与拟抛物型的耦合问题，如〔1〕用Galerkin方法讨论了一类多维高阶拟抛物抛物型耦合方程组的边值问题。本文则是用有限差分方法，类似于〔2〕中对一般二阶抛物型方程进行的讨论，给出了一类拟抛物抛物型耦合方程边值问题广义解的存在唯一性。

关键词：拟抛物，耦合方程，弱广义解

一、广义解的定义

我们考虑方程：

$$\sum_{ij=1}^{n}\left(a_{ij}u_{x_it}\right)_{x_j}+\sum_{ij=1}^{n}\left(A_{ij}u_{x_i}\right)_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}+Cu-u_t=F \quad (1.1)$$

设$\Omega\subseteq R^n$为有界区域，$Q=\Omega\times(0,T)$，$S=\partial\Omega\times(0,T]$，$\Gamma=S\cup\overline{\Omega}$。把所有属于Q而到S的距离大于δ的点集记作$Q^\delta$。

a_{ij}，A_{ij}，B_i，C，F为$\overline{Q}$上的函数，且有$a_{ij}=a_{ji}$，$A_{ij}=A_{ji}$成立。

下面对本文所用的符号作一说明。在$\overline{Q}$上无限可导，对任意δ＞0在Q、Q^δ内等于零的函数类用$\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$表示。Ω上的试探函数空间记为$C_0^\infty(\Omega)$。$C^1(\Omega)$中具紧支集的函数全体记为$C_0^1(\Omega)$

若Ω的边界分片连续，则记为$\partial\Omega\in A^1$。

$\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$在COБОΛeB空间$W_2^{1,1}(Q)$中的完备化空间用$\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$表示。$C_0^\infty(\Omega)$在$W_2^1(\Omega)$中的完备化空间用$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$表示

记V（Q）为满足如下条件的函数υ全体，$\upsilon\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$，且$\upsilon_{x_it}\in L_2(Q)$显然V(Q)为$\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$的向量子空间，在其中引进范数$\|\upsilon\|_v=\|\upsilon\|_w+\sum_{i=1}^{n}\|\upsilon_{x_it}\|_{L_2}$。这里$\|\cdot$

$\|\ \|_w$为coδoΛcB空间$W_2^{1,1}(Q)$中的范数，$\|\cdot\|_{L_2}$为L_2中范数。易证$V(Q)$为Banach空间，并有嵌入$V(Q)\to \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$成立。

现在我们对于方程(1·1)给出一种广义解的定义，我们将对这种解进行讨论。

定义　若函数$u(x,t)\in V(Q)$满足$u(x,o)=\varphi(x)$且对任意$v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$有

$$\iint_Q\Big[\sum_{ij=1}^n(a_{ij}u_{x_it}+A_{ij}u_{x_i})v_{x_j}-\Big(\sum_{i=1}^n B_iu_{x_i}+Cu-u_t-F\Big)v\Big]dxdt=0 \qquad (1\cdot 2)$$

则我们称$u(x,t)$为满足边值条件

$$\begin{cases}u(x,0)=\varphi(x)\\ u|_S=0\end{cases} \qquad (1\cdot 3)$$

的(1·1)的弱广义解。

以后我们所提到的(1·1)的解，均是这种意义下的解。

二　唯一性

我们有如下唯一性结果

定理3·1　设$(a_{ij})_t,B_i,C\in L^\infty(Q)$且存在常数$\mu>o$使对任意的$(\xi,x,t)\in R^n\times Q$有

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}\,\xi_i\xi_j\geqslant\mu|\xi|^2,\quad \sum_{ij=1}^n A_{ij}\,\xi_i\xi_j\geqslant\mu|\xi|^2。 \qquad (2\cdot 1)$$

则(1·1)，(1·3)至多有唯一解。

证　设u_1,u_2为任意两个解，显然$u=u_1-u_2$满足

$$\iint_Q\Big[\sum_{ij=1}^n a_{ij}\,u_{x_it}v_{x_j}+\sum_{ij=1}^n A_{ij}u_{x_i}v_{x_j}-v\Big(\sum_{i=1}^n B_iu_{x_i}+Cu-u_t\Big)\Big]dxdt=o \qquad (2\cdot 2)$$

$$\Big(\forall v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)\Big)$$

及

$$u(x,o)=0,\qquad u|_s=0$$

设M为$|B_i|$，$|C|$，$|(a_{ij})t|$的上界，取$v=u(x,t)e^{-\theta t}$，置$\theta>\max\Big[2\Big(M+M^2\frac{n}{4\mu}\Big),\ \frac{n}{\mu}M\Big]$，注意到

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}u_{x_it}u_{x_j}=\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^n a_{ij}(u_{x_i}u_{x_j})_t \qquad (2\cdot 3)$$

可得：

$$o\geqslant\frac{1}{2}\int_{t=T}u^2e^{-\theta T}dx+\iint_Q e^{-\theta t}\left(\frac{\theta}{2}u^2+\sum_{ij=1}^{n}A_{ij}u_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}u-cu^2\right)dxdt+\frac{1}{2}$$

$$\sum_{ij=1}^{n}\iint_Q a_{ij}\,(u_{x_i}u_{x_j})_te^{-\theta t}dxdt\geqslant\iint_Q e^{-\theta t}\left[\left(\frac{\theta}{2}-M-M^2\frac{n}{4\mu}\right)u^2+\left(\frac{\theta}{2}\mu-\frac{n}{2}M\right)\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i})^2\right]dxdt\geqslant o \qquad (2\cdot4)$$

从上式可知$\iint_Q e^{-\theta t}u^2dxdt$，从而可证在Q上几乎处处有$u=0$。证毕。

三 差分格式及估计

我们用直线$t=rh$，$x_i=p_ih(i=1,\cdots,n)$组成的正交网复盖带形区域$H=\{o\leqslant t\leqslant T,$ $x\in R^n\}$，其中p_i取所有整数值，r取〔o，$\frac{T}{h}$〕中的整数值。$h>0$，且不妨认为$\frac{T}{h}$为整数。

我们在网的结点上定义函数u^h。用S_h表示在$\bar{Q}\setminus\Gamma$中与$\bar{Q}\setminus S$外的网的任意结点相邻的结点，Q_h表示$\bar{Q}/\Gamma$内的其它结点，函数u^h如此定义：在S_h及$\bar{Q}\setminus S$外的结点上取零值，在Q的下底的网的结点上$u^h(x,o)=\varphi(x)$，在Q_h上的值由线性方程组

$$\sum_{ij=1}^{n}\frac{\Delta}{\Delta_{x_i}}\left(a_{ij}\frac{\Delta^2u}{\Delta x_j\Delta t}\right)+\sum_{ij=1}^{n}\frac{\Delta}{\Delta x_i}\left(A_{ij}\frac{\Delta u}{\Delta x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\Delta u}{\Delta x_i}+Cu-$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=F \qquad (3\cdot1)$$

决定。其中$\frac{\Delta}{\Delta x_i}$为向后差分，$\frac{\Delta}{\Delta x_i}$为向前差分。

用类似于〔2〕所用的方法，我们可证

定理4.1网格上的函数$u=u^h$满足

$$\sum_Q\left[u^2+\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x_i}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta^2u}{\Delta x_i\Delta t}\right)^2\right]\leqslant K\left[\sum_Q F^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{h}\sum_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x_i}\right)^2\right] \qquad (3.2)$$

其中常数K仅依赖于区域Q及（2.1）的系数。$\sum\limits_{Q}$表示对所有的S_h，Q_h点求和，$\sum\limits_{\Omega}$表示对Ω上的所有结点求和。

从（3·2）式易证

定理3·2线性方程组（3.1）存在唯一一组解。

四、存在性定理

本节我们将先给出$\varphi(x)\in C_0^1(\Omega)$，$F(x,t)\in C(\overline{Q})$时解的存在性证明，然后再拓广到$\varphi(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$，$F(x,t)\in L_2(Q)$时的情形。

定理4.1　若$\partial\Omega\in A^1$，（1.1）的所有系数在$\overline{Q}$上连续，且有

$$(A_{ij})_t,\ (a_{ij})_t \in L^\infty(Q) \tag{4.1}$$

$$\varphi(x)\in C_0^1(\Omega),\ F(x,t)\in C(\overline{Q}) \tag{4.2}$$

及（2.1）成立，则（1.1），（1.3）存在解$u\in V(Q)$且满足

$$\iint\limits_{Q}\Big[u^2+\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i})^2+(u_t)^2+\sum_{i=1}^{n}(u_{x_it})^2\Big]dxdt\leqslant K\Big[\iint\limits_{Q}F^2dxdt+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}(\varphi_{x_i})^2dx\Big] \tag{4.3}$$

为证明此定理，我们需要下面的引理。

当$(p_i-1)h<x_i\leqslant p_ih$，$(r-1)h<t\leqslant rh$时，置$u^h(x,t)=u^h(p_ih,rh)$，从而$u^h(x,t)$在$\overline{H}=\{o\leqslant t\leqslant T,\ x\in R^n\}$上处处有定义，且逐段常值。用同样的方法在H上可确定$\frac{\Delta u^h}{\Delta x_i}$，$\frac{\Delta u^h}{\Delta t}$，$\frac{\Delta^2u^h}{\Delta x_i\Delta t}$对应的逐段常值函数$u_i^h(x,t)$，$u_o^h(x,t)$，$u_{2i}^h(x,t)$。

首先我们有：

引理4.1　当$h\to o$时，u^h，u_i^h，u_o^h，u_{2i}^h在$L_2(Q)$内弱收敛于u,u_i,u_o,u_{2i}其满足

$$\iint\limits_{Q}\Big(u^2+\sum_{i=1}^{n}u_i^2+u_o^2+\sum_{i=1}^{n}u_{2i}^2\Big)dxdt\leqslant K\Big[\iint\limits_{Q}F^2dxdt+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}(\varphi_{x_i})^2dx\Big] \tag{4.4}$$

证　在(3.2)两边同乘h^{n+1}得：

$$\iint\limits_{Q}\Big[(u^h)^2+\sum_{i=1}^{n}(u_i^h)^2+(u_2^h+\sum_{i=1}^{n}(u_{2i}^h)2\Big]dxdt\leqslant K\Big[\sum_{Q}F^2h^{n+1}+h^n$$

$$\sum_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_i})^2\Big] \qquad (4.5)$$

又因 $\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1, \cdots x_i-1, \xi_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$，$\xi_i\in(x_i-h, x_i)$，所以（4.5）右端是$F^2(x, t)$及$\sum_{i=1}^{n}(\varphi_{x_i})^2$在Q上的积分和。由$\varphi(x)\in \overset{\circ}{C}{}^1(\Omega)$，$F\in C(\overline{Q})$可知此积分和关于h一致有界，从而$u^h$, u_i^h, u_o^h, u_{2i}^h在$L_2(Q)$意义下关于h一致有界，再弱紧性定理即得引理。证毕。

引理4.2　在弱导数意义下，我们有$u_i=u_{x_i}$，$u_o=u_t$，$u_{2i}=u_{x_it}$且u满足(1.3)及$u\in v(Q)$。

证　设$\psi(x, t)\in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$，我们有

$$\sum_{Q}(\psi(t-h)u_o^h+u^h\frac{\Delta\psi}{\Delta t}) = -\frac{1}{h}\sum_{t=0}\psi u^h \qquad (4.6)$$

在网的内结点上置$\psi^h(x,t)=\psi(x,t-h)$，$x_o^h(x,t)=\frac{\Delta\psi(x,t)}{\Delta t}$，在$\overline{H}/Q$上置其为零。同前将$\psi^h$，$\psi_o^h$延拓为逐段常值函数。用$h^{n+1}$乘(4.6)可得：

$$\iint_Q \psi^h u_o^h + u^h\psi_o^h)dxdt = -\int_\Omega \psi^h(x,o)\varphi^h(x)d_x \qquad (4.7)$$

其中$\varphi^h(x)$是逐段常数函数，在结点上等于$\varphi(x)$。显然一致地有

$$\lim_{h\to o}[\psi^h(x,t),\psi^h(x,h),\psi_o{}^h(x,t)] = [\psi(x,t),\psi(x,o),\psi t(x,t)]$$

及存在$\{h_k\}$（当$k\to\infty$时，$h_k\to o$）使

$$(\text{弱})\lim_{h\to o}(u^{hk},u_o{}^{hk})=(u,u_o)$$

由此可得

$$\lim_{k\to\infty}\iint_Q \psi^{hk}u_o^{hk}dxdt=\iint_Q\psi u_o dxdt,$$

$$\lim_{k\to\infty}\iint_Q \psi_o^{hk}u^{hk}dxdt=\iint_Q u\varphi_t dxdt$$

从而

$$\iint_Q(\psi u_o+u\psi_t)dxdt=-\int_\Omega\psi(x,o)\varphi(x)dx \qquad (4.8)$$

因为$\psi(x,t)\in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$，特别取$\psi(x,t)\in C_0^{\infty}(Q)$，故$\psi(x,o)=o$，因此（4.8）即为$\iint\limits_Q \psi u_0 dxdt=-\iint\limits_Q u\psi_t dxdt$此即说明u弱可微，且$u_0=u_t\in L_2(Q)$。

同理可证$u_{xi}=u_i\in L_2(Q)$。到此我们已证得$u\in W_2^{1,1}(Q)$。

进一步，将（4.6）中的u^h换成u_i^h可证得$u_{zi}=u_{xit}\in L_2(Q)$。

由(4.8)及$\iint\limits_Q\left(x\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dxdt=-\int\limits_\Omega \psi(x,o)u(x,o)dx$可知$u|_{t=o}=\varphi(x)$，又因$u^h$在$S_h$及$\overline{Q}\setminus S$外为零故（4.5）左端在整个$\overline{H}$上可积，于是$u(x,t)\in W_2^{1,1}(H)$。由在$\overline{Q}$外$u(x,t)\equiv o$知$u|_S=o$，于是$u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$。最终有$u\in V(Q)$。证毕。

为证明定理4.1我们还需要

引理4.3　若函数序列$\{v_m(x)$当$m\to\infty$时在$L_2(Q)$内弱收敛于$v(x)$，且$\left\|\frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right\|_{L_2}$关于m一致有界，则$v(x)$有广义导数$v_{xk}\in L_2(Q)$且$\frac{\partial v_m}{\partial x_k}$弱收敛于$\frac{\partial v}{\partial x_k}$。

$(k=1,\cdots,n+1)$

证明见〔3〕

定理4.1证明　设$\psi(x,t)\in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$，在$Q_h$上用$\psi(x,t)$在这点的值去乘（3.1），又注意到当h充分小时在$s_h$上$\psi(x,t)=o$，我们得

$$\sum_Q F\psi=\sum_Q\Big[\Big(-\psi\frac{\Delta u}{\Delta t}-\sum_{ij=1}^n A_{ij}\frac{\Delta\psi}{\Delta x_i}\frac{\Delta u}{\Delta x_j}-\sum_{ij=1}^n a_{ij}\frac{\Delta\psi}{\Delta x_i}\frac{\Delta_2 u}{\Delta x_j\Delta t}\Big)+\sum_{i=1}^n \psi B_i\frac{\Delta u}{\Delta x_i}+\psi cu\Big]\tag{4.9}$$

与前面方法类似定义逐段常值函数$F^h(x,t)$，$\psi^h(x,t)$，$\psi_i^h(x,t)$，$A_{ij}^h(x,t)$，$a_{ij}^h(x,t)$，$_i^h(x,t)$，$C^h(x,t)$，并以h^{n+1}乘(4.9)两边得

$$\iint\limits_Q F^h\psi^h dxdt=\iint\limits_Q\Big[-\psi^h u_0^h-\sum_{ij=1}^n A_{ij}^h\psi_i^h u_j^h-\sum_{ij=1}^n a_{ij}^h\psi_i^h u_{2j}^h+\sum_{i=1}^n \psi^h B_i^h u_i^h+\psi^h c^h u^h\Big]dxdt\tag{4.10}$$

令$h=h_k\to o$，得(1.2)，且由(3.2)得(4.3)。又由引理4.2知u满足(1.3)。证毕。

进一步我们有

定理4.2 设$\varphi(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$，$F(x,t)\in L_2(Q)$，其余条件同定理4.1。则问题(1.1)，(1.3)存在解$u\in V(Q)$。

证 作序列$\{\varphi_m(x)\}\subseteq C_o^{\infty}(\Omega)$，$F_m(x,t)\in c(\overline{Q})$使得

$$\lim_{m\to\infty}\|\varphi_m-\varphi\|_W=o,\quad \lim_{m\to\infty}\|F-F_m\|_{L_2}=o$$

对于任意函数对（φ_m，F_m），据定理4.1可知在$v(Q)$中存在（2.1）（2.3)的解$u_m(x,t)$。由（4.3）知$\{\|u_m\|_v\}$关于m一致有界。由L_2中的弱致密性定理及引理4.3可知有$\{u_m\}$的子序列（不妨仍记为u_m）及$u\in v$（Q）使在L_2（Q）中有u_m，$(u_m)_t$，$(u_m)_{xi}$，$(u_m)_{xit}$分别弱收敛于u,u_t,u_{xi},u_{xit}。在（φ_m，F_m）对应的方程（1.2）两边令$m\to\infty$，又因显然$u(x,o)=\varphi(x)$，$u|_s=o$，可得定理结论。证毕。

参考文献

〔1〕陈国旺，一类多维高阶拟抛物抛物型耦合方程组的边界问题，郑州大学学报1（1986），1—12

〔2〕Соболев，С.Н.，Некоторьет Примененик функционалbного аналита В Математической，физике，Над，ПГУ

〔3〕Илин，А.М.，КалашниковА.С.，Олениqк，О.А.，Успехи МатпаИЧЕСИХ аук. ТОМ，XVII，Вьлпуі 3(105)，1962，3—146

THE BOUNDARY PROBLEM OF A CLASS OF PSEUDO—PARABOLIC AND PARABOLIC COUPLED EPUATIONS

Dong Liqun

(Henan Institute of Mathematics)

Abstract

In this paper by using finite difference method, we prove the existence and uniqueneness of the generalized, solution of the linear partial differential equation

$$\sum_{ij=1}^{n}(a_{ij}u_{xit})_{xj}+\sum_{ij=1}^{n}(A_{ij}u_{xi})_{xi}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{xi}+cu-u_t=F$$

Key Words: Pseudo-parabolic, coupled equations, generalized weak solution.